

**ANAIIS DO
I ENCONTRO REGIONAL
DE MATEMÁTICA E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DA UTFPR-PB**

E56 Encontro Regional de Matemática e Educação Matemática da UTFPR-PB
(1.: 2025: Pato Branco, PR).
Anais do I Encontro Regional de Matemática e Educação Matemática da
UTFPR-PB [recurso eletrônico] / Edinéia Zarpelon, Mateus Eduardo
Salomão, Waldir Silva Soares Junior, organizadores. -- Pato Branco (PR):
UTFPR, 2025
1 arquivo texto (71 p.): il.

elSBN: 978-65-01-77987-4
Modo de acesso: World Wide Web

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Matemática aplicada 3. Matemática-
Pesquisa I. Zarpelon, Edinéia. II. Salomão, Mateus Eduardo III. Soares Junior,
Waldir Silva IV. Título

CDD (22. ed.) 372.65

Ficha Catalográfica elaborada por
Rosana da Silva CRB9/1745
Biblioteca da UTFPR- Campus Pato Branco

Reitor

Everton Ricardi Lozano da Silva

Diretor-Geral do Campus Pato Branco

Neimar Follmann

Diretora de Graduação e Educação Profissional

Sandra Mara Iesbik Valmorbida

Diretor de Pesquisa e Pós-graduação

Thiago de Oliveira Vargas

Diretor de Relações Empresariais e Comunitárias

Ricardo Bernardi

Diretor de Planejamento e Administração

Antônio Carlos Mazzetti

Organizadores

Edinéia Zarpelon

Mateus Eduardo Salomão

Waldir Silva Soares Junior

Comissão Organizadora do Evento

Alice Carolina Silveira Zucho

André Guerino Castoldi

Cleonis Viater Figueira

Élida Maiara Velozo de Castro

Fernanda Faust Rodrigues

Maria Eduarda Fontana

Maria Jaqueline Mochnacz

Mateus Eduardo Salomão

Rafael Flores Isoppo

Rômél Da Rosa Da Silva

Vanderlei Martins

Waldir Silva Soares Junior

Comitê Científico

Élida Maiara Velozo de Castro

Rômél Da Rosa Da Silva

Vanderlei Martins

Revisão

Edinéia Zarpelon

Diagramação/Revisão e Capa

Alice Carolina Silveira Zucho

Maria Jaqueline Mochnacz

Mateus Eduardo Salomão

Endereço

Via do Conhecimento, Km 1 – CEP 85503-390 - Pato Branco - PR - Brasil
Telefone: (46) 3220-2511

APRESENTAÇÃO

O I Encontro Regional de Matemática e Educação Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Pato Branco (UTFPR-PB), realizado em 2025, emerge como uma iniciativa promovida pelo curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-PB. O evento foi concebido com o propósito de fomentar a divulgação de pesquisas científicas e tecnológicas nos campos da Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática, visando tanto a comunidade acadêmica quanto a sociedade em geral.

Conduzido entre os dias 25 e 29 de agosto de 2025, o Encontro ocorreu simultaneamente à XXV Semana Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática. Nessa ocasião, foram realizadas 5 palestras, 2 mesas redondas e 3 minicursos, envolvendo diferentes temáticas, todas elas pertinentes ao contexto educacional e acadêmico. Além disso, foram apresentados 14 trabalhos, no formato de comunicações orais e pôsteres, demonstrando a diversidade e a qualidade das pesquisas submetidas.

A relevância do evento reside na sua capacidade de criar um ambiente propício à integração e ao intercâmbio de saberes entre estudantes e servidores da UTFPR – PB, além de docentes, pesquisadores de outras instituições de ensino básico e superior, e membros da comunidade externa. Tal interação é crucial para o fortalecimento da rede de pesquisa e para a difusão do conhecimento.

Neste cenário, cabe destacar que a pesquisa científica e tecnológica é um pilar fundamental para o desenvolvimento social, uma vez que impulsiona a produção de novos conhecimentos, a solução de problemas práticos e a inovação. Ademais, a Matemática e a Educação Matemática desempenham um papel central, fornecendo as ferramentas analíticas necessárias para o desenvolvimento do pensamento crítico, a resolução de problemas complexos e a compreensão de fenômenos que permeiam o cotidiano.

Destaca-se ainda que, eventos de divulgação científica, como o I Encontro Regional de Matemática e Educação Matemática da UTFPR-PB, são especialmente relevantes para a formação de futuros professores, pois proporcionam contato direto com a pesquisa e a extensão, estimulando a postura de professor pesquisador e capacitando o futuro docente a refletir criticamente sobre sua prática e a problematizar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Ao integrar teoria e prática, essas iniciativas estimulam a produção de novos trabalhos acadêmicos e ampliam a percepção dos estudantes sobre o papel transformador da ciência e da educação na sociedade.

Como resultado deste evento, os Anais do I Encontro Regional de Matemática e Educação Matemática da UTFPR-PB são publicados neste documento, na modalidade de resumo, compilando os trabalhos apresentados e perpetuando o conhecimento compartilhado.

Organizadores

Prof. Dra. Edinéia Zarpelon

Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão

Prof. Dr. Waldir Silva Soares Junior

SUMÁRIO

PALESTRAS

Matemática que nasce das perguntas: Modelagem Matemática e Criatividade na Educação Matemática.....	8
--	----------

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

Demonstrações matemáticas dinâmicas na plataforma Geogebra	9
---	----------

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga

Linha do tempo algébrica: uma jornada pela história da Álgebra	10
---	-----------

Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão

Dinâmica do Toro Bidimensional: a interação entre propriedades numéricas e comportamento geométrico de campos vetoriais.....	11
---	-----------

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes

De Euler a Poicaré: um passeio pela topologia.....	12
---	-----------

Prof. Dr. Eduardo Caramori da Silva

MESAS REDONDAS

Perspectivas sobre a inclusão: experiências, desafios e possibilidades.....	13
--	-----------

Marli Terezinha Sauthier Ramos

Alexandra Magna Marx Verdi

Cássia Ribeiro de Souza

Janaina Alves de Oliveira Cordeiro do Amaral

Nadia Rios Diaz

Pedro Henrique Belusso

Giliane Aparecida Schmitz

Aonde a matemática me levou: vivências profissionais de egressos da Licenciatura em Matemática da UTFPR-PB.....	14
--	-----------

Claudinei Kichel

Danieli Marx

Bruna Caveion

Ana Maria Paludo

Ariane Thaís Vitali

Janecler Aparecida Amorin Colombo

MINICURSOS

Construção e exploração de tarefas com <i>feedbacks</i> automáticos no Geogebra.....	15
---	-----------

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga

O planejamento do ensino de Matemática a considerar a inclusão de estudantes com deficiência	16
---	-----------

Profa. Dra. Lucia Virginia Mamcasz Viginhessi

Noções básicas da álgebra de conjuntos como Ferramenta do raciocínio dedutivo matemático.....	17
--	-----------

Prof. Dr. João Biesdorf

COMUNICAÇÕES ORAIS E PÔSTERES

A distribuição de ideais em conjuntos parcialmente ordenados.....	21
--	-----------

Maria Jaqueline Mochnacz

André Guerino Castoldi

Aplicação da transformada de Laplace.....	25
--	-----------

Alana Tecchio Galon

Gilson Tumelero

Aplicações de equações diferenciais ordinárias.....29

Hemely Heidemann Fontanella

Marieli Musial Tumelero

As σ -álgebras e suas aplicações.....33

Eduardo Furlan

Cleonis Viater Figueira

Aulas de matemática no RCO+aulas: uma análise com base em documentos oficiais e práticas inovadoras.....37

Arthur Casagrande Duarte Santana

Janecler Aparecida Amorim Colombo

Cacheta geométrica: uma possibilidade metodológica para o ensino de prismas e pirâmides para o ensino fundamental II.....41

Letícia Eduarda Zaltran Pezzini

Marieli Musial Tumelero

Condições de Karush-Kuhn-Tucker e o método SQP para problemas de otimização não linear com restrições.....45

Gabriela Fernanda Schmoller

Adriano Rodrigo Delfino

Espaços topológicos e funções contínuas.....49

Gileade Trentin Detogni

Mateus Eduardo Salomão

Espaços vetoriais quocientes e o teorema do isomorfismo.....53

Vinícios Gabriel Positz Haiduk

Mateus Eduardo Salomão

O grupo fundamental do toro e seu uso em códigos de superfícies.....57

Alice Carolina Silveira Zucho

Waldir Silva Soares Junior

O uso do aplicativo mathcitymap em atividades revisionais de matemática nas escolas.....60

Luíza Dalla Costa Perusso

Operações internas: definição, propriedades e estruturas.....64

Milena Bach

Gilson Tumelero

Previsão de dados de temperatura usando técnicas estatísticas e de aprendizado de máquina.....68

Fernanda Paula Uliana

Sheila Regina Oro

Waldir Silva Soares Junior

PALESTRA 1

MATEMÁTICA QUE NASCE DAS PERGUNTAS: MODELAGEM MATEMÁTICA E CRIATIVIDADE NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL)
Professor da UTFPR – Campus Toledo

RESUMO

A palestra propõe uma reflexão sobre o ensino de Matemática centrado nas perguntas significativas feitas por estudantes, valorizando a curiosidade como ponto de partida para a aprendizagem. A partir da Modelagem Matemática, discute-se como é possível promover experiências que favoreçam o pensamento crítico, a criatividade e a autoria dos alunos. Direcionada a professores em formação e em exercício, a proposta convida a repensar o papel docente como provocador de perguntas e não como transmissor de informações, principalmente no contexto da Educação Básica.

PALESTRA 2

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DINÂMICAS NA PLATAFORMA GEOGEBRA

Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
Doutorado em Educação (UNB)
Professor da UFSC – Blumenau

RESUMO

Nesta palestra apresentarei um novo conceito que tenho chamado de Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. Não se trata de uma nova forma de demonstração, mas sim de como apresentá-la. Mais do que validar, o objetivo é explicar para que o estudante compreenda de fato. A criação de um novo conceito era necessária porque as demonstrações dinâmicas têm características próprias que diferem das demonstrações convencionais. Esse tipo de demonstração só é possível em ambientes de Matemática Dinâmica. Os primeiros experimentos feitos com estudantes de licenciatura em Matemática indicam que o uso das Demonstrações Matemáticas Dinâmicas pode auxiliar a compreensão, desenvolver a aprendizagem com autonomia e potencializar o poder argumentativo. Durante a palestra, mostrarei exemplos de Demonstrações Matemáticas Dinâmicas produzidas na plataforma GeoGebra.

PALESTRA 3

LINHA DO TEMPO ALGÉBRICA: UMA JORNADA PELA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

Dr. Mateus Eduardo Salomão
Doutorado em Matemática (UFSCar)
Professor da UTFPR – Campus Pato Branco

RESUMO

Nesta palestra serão explorados os marcos históricos da álgebra, desde seus primeiros registros até o presente. Serão destacados vários matemáticos influentes que foram cruciais na consolidação e desenvolvimento das estruturas algébricas, bem como alguns fatos interessantes e definições de algumas destas estruturas. O trabalho oferecerá uma visão abrangente da evolução e impacto da álgebra ao longo do tempo.

PALESTRA 4**DINÂMICA DO TORO BIDIMENSIONAL: A INTERAÇÃO ENTRE
PROPRIEDADES NUMÉRICAS E COMPORTAMENTO GEOMÉTRICO DE
CAMPOS VETORIAIS**

Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes
Doutorado em Matemática Aplicada (UFPR)
Professor da UFPR

RESUMO

Exploraremos a periodicidade de trajetórias determinadas por campos vetoriais no toro plano. Utilizando o campo constante como exemplo, veremos como a racionalidade ou irracionalidade da inclinação das retas determina a periodicidade ou a densidade das trajetórias. Esse fenômeno motiva o Teorema de Denjoy, que caracteriza a existência de órbitas periódicas. A seguir, aplicaremos a Análise de Fourier no toro para estudar campos vetoriais do tipo $dt+adx$. Descobriremos que sua resolubilidade global ocorre sempre que a é racional ou, mesmo sendo irracional, quando a é não-Liouville, mostrando assim, como propriedades aritméticas se relacionam com propriedades geométricas.

PALESTRA 5

DE EULER A POICARÉ: UM PASSEIO PELA TOPOLOGIA

Ms. Eduardo Caramori da Silva
Doutorando em Matemática Aplicada (UNESP)

RESUMO

A relação $V-A+F=2$, estabelecida por Euler para poliedros convexos, revela uma surpreendente regularidade que se mantém mesmo para alguns poliedros não convexos. Essa constância dá origem à *característica de Euler*, uma quantidade que se mantém invariante por deformações contínuas. A generalização dessa ideia leva ao estudo topológico das superfícies fechadas, culminando na sua classificação completa. A conexão entre a simplicidade do teorema de Euler e a profundidade das ideias de Poincaré ilustra a evolução do pensamento matemático e a transição da geometria clássica para a topologia moderna.

MESA REDONDA 1

PERSPECTIVAS SOBRE A INCLUSÃO: EXPERIÊNCIAS, DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Marli Terezinha Sauthier Ramos

Alexandra Magna Marx Verdi

Cássia Ribeiro de Souza

Janaina Alves de Oliveira Cordeiro do Amaral

Nadia Rios Diaz

Pedro Henrique Belusso

Mediadora: Giliane Aparecida Schmitz

RESUMO

Com o propósito de aprofundar a compreensão sobre a efetivação da Educação Inclusiva no contexto escolar, esta mesa redonda propõe uma discussão interdisciplinar e prática. Reunindo profissionais com atuações diversas (que inclui gestão escolar, docentes da educação básica, professor de sala de recursos, professor de apoio, psicóloga especialista em Transtorno do Espectro Autista), o evento propõe uma análise aprofundada das experiências concretas de inclusão, bem como o compartilhamento de desafios reais encontrados no dia a dia e perspectivas para atuações futuras. O objetivo é subsidiar os licenciandos com uma visão realista e inspiradora, fomentando a postura de professor pesquisador e capacitando-os a serem agentes transformadores na construção de um ambiente escolar verdadeiramente acolhedor e equitativo.

MESA REDONDA 2

AONDE A MATEMÁTICA ME LEVOU: VIVÊNCIAS PROFISSIONAIS DE EGRESSOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UTFPR-PB

Claudinei Kichel

Danieli Marx

Bruna Caveion

Ana Maria Paludo

Ariane Thaís Vitali

Mediadora: Janecler Aparecida Amorin Colombo

RESUMO

Esta mesa redonda tem como objetivo principal apresentar e discutir as diversas trajetórias profissionais e vivências de egressos do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-PB. Por meio de depoimentos, os egressos convidados compartilharão suas experiências em carreiras que vão além do magistério. O debate visa inspirar estudantes e recém-formados, demonstrando a versatilidade do diploma e a importância da formação em Licenciatura da UTFPR-PB como base para o sucesso em um mercado de trabalho complexo e multidisciplinar.

MINICURSO 1

CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE TAREFAS COM *FEEDBACKS* AUTOMÁTICOS NO GEOGEBRA

Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
Doutorado em Educação (UNB)
Professor da UFSC – Blumenau

RESUMO

O Ensino híbrido ganhou força depois da epidemia do covid 19. Trata-se de uma abordagem que diz que a aprendizagem deve acontecer tanto no espaço físico da sala de aula quanto em plataformas digitais de ensino. Mas como o estudante pode ter feedback quando o professor não estiver o acompanhando o desenvolvimento das tarefas? Neste minicurso mostrarei como tarefas com feedbacks automáticos podem ser produzidas no GeoGebra. Mostrarei exemplos de tarefas que contêm feedbacks automáticos sobre acertos e erros. Também mostrarei como fazer feedbacks automáticos que buscam antecipar possíveis erros dos estudantes.

MINICURSO 2

O PLANEJAMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA A CONSIDERAR A INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

Dra. Lucia Virginia Mamcasz Viginhessi
Doutorado em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR-PG)
Professora da UniGuairacá

RESUMO

O minicurso tem como objetivo instrumentalizar os acadêmicos do curso de Matemática para o planejamento de um ensino inclusivo de Matemática, por meio de atividades teórico práticas. Fundamenta-se nos pressupostos teóricos da Teoria Histórico-Cultural e na teoria de Galperin, sobre a formação das ações mentais por meio de etapas.

NOÇÕES BÁSICAS DA ÁLGEBRA DE CONJUNTOS COMO FERRAMENTA DO RACIOCÍNIO DEDUTIVO MATEMÁTICO

João Biesdorf¹

RESUMO

Na Matemática é comum transitarmos problemas em diferentes áreas de conhecimento para melhor explorar as ferramentas de resolução. Neste sentido, a proposta do presente minicurso é trazer-mos noções básicas da álgebra de conjuntos aplicado às implicações lógicas matemáticas com exemplos aplicados tanto ensino de nível Superior quanto ao do Médio.

Palavras-chave: Conjuntos, Propriedades, Implicações.

1 Objetivo geral

Apresentar alternativas de demonstrações de implicações lógicas entre proposições matemáticas transformando as mesmas em inclusão de conjuntos. Deste modo o raciocínio dedutivo é transformado na já bem estabelecida Álgebra de conjuntos.

2 Desenvolvimento do tema

Sobre a noção de conjunto podemos considerar que dado um conjunto A e um elemento a admite-se exatamente uma opção entre " a ser um elemento de A ", ou " a não é um elemento de A ". No primeiro caso dizemos que o elemento a pertence ao conjunto A , ou simplesmente a pertence à A e escrevemos $a \in A$. Já no segundo caso dizemos que o elemento a não pertence ao conjunto A , ou simplesmente a não pertence à A e escrevemos $a \notin A$.

"Um conjunto A fica definido (ou determinado, ou caracterizado) quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A ." (Lima, 2014) p2.

Como a Álgebra de Conjuntos tem seus resultados bem estabelecidos, queremos neste trabalho introduzir a equivalência entre demonstração de implicações lógicas e inclusão de conjuntos. Neste sentido, em vez de dizer que um elemento ou objeto matemático x goza da propriedade (satisfaz condição) P , podemos dizer ou escrever $x \in A$ onde A é o conjunto dos elementos ou objeto matemáticos x que gozam da propriedade (satisfazem a condição) P . Neste caso denotamos $A = \{x; x \text{ goza da propriedade (satisfaz condição)} P\}$.

De uma forma ou outra deve estar claro o universo U no qual um conjunto é definido. Esta clareza muitas vezes se dá pelo contexto ou pelo próprio conjunto. Por exemplo $\{n; n \text{ é primo}\}$ está

¹Professor do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Pato Branco, jbiesdorf@utfpr.edu.br

claro estamos nos referindo ao universo $U = \mathbb{N}$. Porém mesmo assim não faz mal escrever o mesmo conjunto por $\{n \in \mathbb{N}; n \text{ é primo}\}$. Mas caso queiramos nos referir aos primos maiores que 10 e isto não esteja claro no contexto, então precisamos deixar esta condição clara na definição do conjunto, por exemplo $\{n; n \text{ é primo e } n > 10\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}; n \text{ é primo e } n > 10\}$. O conjunto Universo pode determinar muito sobre o conjunto em questão, vejamos por exemplo a equação $x^2 = 2$ em $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ neste caso, na primeira equação não temos solução, na segunda duas soluções.

Tendo estabelecido relação entre propriedades e conjuntos, podemos estudar as implicações lógicas como inclusão de conjuntos.

Dizemos que um conjunto A está contido num conjunto B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A for elemento de B , isto é, $x \in A \Rightarrow x \in B$. A relação de inclusão goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Se P e Q forem propriedades que podem averiguadas nos elementos de um conjunto universo U , e definirmos $A = \{x \in U; x \text{ goza da propriedade } P\}$ e $B = \{x \in U; x \text{ goza da propriedade } Q\}$, então temos por definição, $A \subset B$ equivalente a $P \Rightarrow Q$. Assim valem as propriedades equivalentes da relação de implicação entre sentenças (proposições) lógicas. Em especial, temos a transitividade que é a base para o raciocínio lógico dedutivo. Vejamos por exemplo no caso de resolução de equações:

Para $x \in \mathbb{R}$, sejam P, Q, R, S, T, U e V respectivamente as propriedades das implicações ($\Rightarrow$) a seguir: $x = -\sqrt{x+12}; \Rightarrow x^2 = x+12; \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0; \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0; \Rightarrow (x-4) = 0$ ou $(x+3) = 0; \Rightarrow x = 4$ ou $x = -3; \Rightarrow x \in \{4, -3\}$ e sejam A, B, C, D, E, F e G os subconjuntos de números reais satisfazendo respectivamente estas propriedades. Então temos $A \subset B \subset C \subset D \subset E \subset F \subset G$ e portanto, pela propriedade transitiva da inclusão temos $A \subset G$ e isto quer dizer que se equação $x = -\sqrt{x+12}$ tiver raiz (raízes), então estas pertencem ao conjunto $\{4, -3\}$ e nada mais. De fato, neste caso 4 não é raiz. Inclusive isto poderia ser observado pois nesta hipótese, o lado esquerdo da equação em P seria positivo e o lado esquerdo negativo.

Apesar de termos somente $A \subset G$ e não $A = G$, este tipo de raciocínio tem sua importância, pois o conjunto dos candidatos à solução de $x = -\sqrt{x+12}$, que inicialmente era infinito, e portanto impossível de testar um por um, agora foi reduzido a dois elementos, ficando fácil de testar um por um estes dois elementos e concluir que -3 é a única solução. Como 4 não é solução de $x = -\sqrt{x+12}$ não podemos ter $G \subset A$, ou seja, pela transitividade da relação de inclusão, pelo menos uma inclusão da cadeia $G \subset F \subset E \subset D \subset C \subset B \subset A$ deve ser falsa. De fato não temos $B \subset A$, apesar que as outras inclusões serem verdadeiras.

Diante do exposto até aqui, considerando a dupla inclusão $A \subset B$ e $B \subset A$ temos que a mesma se traduz na equivalência lógica de proposições. Vejamos P, Q, R, S, T , e U respectivamente as propriedades das implicações ($\Rightarrow$) a seguir: $2x^2 + 2x - 12 = 0; \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0; \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0; \Rightarrow (x-2) = 0$ ou $(x+3) = 0; \Rightarrow x = 2$ ou $x = -3; \Rightarrow x \in \{2, -3\}$. Sejam A, B, C, D, E e F os subconjuntos de números reais satisfazendo respectivamente as propriedades P, Q, R, S, T e U acima.

Então temos $A \subset B \subset C \subset D \subset E \subset F$ e portanto, pela propriedade transitiva da inclusão temos $A \subset F$ e isto quer dizer que se equação $2x^2 + 2x - 12 = 0$ tiver raiz (raízes), então estas pertencem ao conjunto $\{2, -3\}$ e nada mais. Porém, facilmente vemos que também valem $F \subset E \subset D \subset C \subset B \subset A$ e portanto, pela propriedade transitiva da inclusão temos $F \subset A$ que por si só, só diz que o conjunto $\{2, -3\}$ está contido no conjunto das raízes da equação $2x^2 + 2x - 12 = 0$, mas, (só por estas incluições), esta equação poderia ter outras raízes. Como pelas primeiras inclusões tivemos $A \subset F$, e por estas últimas $F \subset A$, que junto com propriedade anti-simétrica nos diz que $A = F$ e portanto, agora sim, podemos concluir que o conjunto das raízes da equação $2x^2 + 2x - 12 = 0$ é exatamente o conjunto $\{2, -3\}$. Vale ressaltar que a resolução de equações quadráticas por meio da "Formula de Bhaskara" se traduz na equivalência das soluções e dos valores encontrados não exigindo cuidados adicionais.

Existe um conjunto particularmente distinto que é o conjunto vazio, denotado por $\{\}$ ou $\emptyset$ que é definido como sendo o conjunto que não contém elemento(s). Em termos de condições ou propriedades podemos defini-lo por uma ou mais propriedades ou condições contraditórias. Vejamos por exemplo, $\{n \in \mathbb{Z}; n < 0 \text{ e } 0 < n\}$ ou simplesmente $\{n \in \mathbb{Z}; n < 0 < n\}$, ou ainda $\{n \in \mathbb{Z}; n < n\}$. Cuidado, o conjunto $\{\emptyset\}$ não é o conjunto vazio.

Como o conjunto vazio é definido por uma ou mais propriedades ou condições contraditórias ele está particularmente presente nas demonstração por absurdo. Vejamos por exemplo no caso da demonstração que $\sqrt{2}$ é irracional. Seja $\mathbb{Z}_Q = \{(p, q); p, q \in \mathbb{Z}, \text{ e primos entre si}\}$. Assumimos que $n \in \mathbb{Z}$ é par se, e somente se, n^2 é par e neste caso, n^2 é múltiplo de 4, e que $\sqrt{2}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; $(p, q) \in \mathbb{Z}_Q$. Sejam, P, Q, R, S, T e U respectivamente as propriedades, em $\mathbb{Z}_Q$, das implicações $(\Rightarrow) \frac{p}{q} = \sqrt{2}; \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2; \Rightarrow p^2 = 2q^2; \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ com } p^2 \text{ par}; \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ com } p^2 \text{ múltiplo de } 4; \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ com } p, q \text{ pares}$, o que é uma contradição por definição de $\mathbb{Z}_Q$. Sejam A, B, C, D, E e F os subconjuntos de $\mathbb{Z}_Q$ satisfazendo respectivamente as propriedades P, Q, R, S, T e U acima. Então temos $A \subset B \subset C \subset D \subset E \subset F$ onde $F = \{\}$ e portanto, pela propriedade transitiva da inclusão temos $A \subset \{\}$, logo A é vazio, e isto quer dizer a propriedade P é contraditória em $\mathbb{Z}_Q$. Ou seja, não existe $(p, q) \in \mathbb{Z}_Q; \frac{p}{q} = \sqrt{2}$ e portanto $\sqrt{2}$ não é racional, restando $\sqrt{2}$ ser irracional.

No contexto das propriedades de conjunto complementar surge naturalmente a demonstração por contra positiva. De fato, seja A um conjunto num universo U , então definimos o conjunto complementar de A e denotamos por A^c como sendo o conjunto dos elementos de U que não pertencem ao conjunto A . Isto é, $A^c = \{x \in U; x \notin A\}$. Assim se A é o conjunto dos elementos de um universo U , que satisfazem a propriedade P , e denotando por $\neg P$ a negação de P , temos A^c é o conjunto dos elementos do universo U , que satisfazem a propriedade $\neg P$. Como $A \subset B$ é equivalente a $B^c \subset A^c$, temos $P \Rightarrow Q$ é equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$. É nesta equivalência que consiste a demonstração por contrapositiva. Como exemplo, seja $X = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, em um corpo arquimediano K (por exemplo $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{R}$). Assumindo que 0 é uma cota inferior de X , queremos mostrar que 0 é a maior cota inferior. Para isto, seja $A = (-\infty, 0]$ e C o conjunto das cotas inferiores de X . Para 0 seja maior cota inferior, devemos mostrar $A = C$, mas como

0 é uma cota inferior de X , temos $A \subset C$ e portanto, basta mostra $C \subset A$. Para isto vamos mostrar que $A^c \subset C^c$. De fato, dado $x \in A^c$, (portanto $x > 0$ em K), como K é arquimediano, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_x} < x$, e em especial, $\frac{1}{n_x} < x$ mostrando assim que existe um elemento, em X , a saber $\frac{1}{n_x}$ que é menor que x , mostrando portanto que x não é cota inferior de X , e consequentemente $x \in C^c$, mostrando assim $A^c \subset C^c$, logo $C \subset A$.

Já no que se refere á união e intersecção de conjuntos, dizemos que o conjunto A união B e escrevemos $A \cup B$ como sendo $A \cup B = \{x; x \in A, \text{ ou } x \in B\}$ enquanto definimos o conjunto A intersecção B (ou simplesmente A inter B) e denotamos $A \cap B$ como sendo $A \cap B = \{x; x \in A, \text{ e } x \in B\}$. Aqui temos alguns cuidados que temos que tomar em relação a esta linguagem que inclusive pode parecer estranho nas comunicações informais. Primeiro, que o que diferencia a união pela intersecção de conjuntos é a palavrinha “ou” pela palavrinha “e”. Por outro lado, na linguagem informal a palavra “ou” muitas vezes carrega em si também o significado excludente. Por exemplo considerando (supondo) que tem apenas dois tipos de ensino em relação á sua natureza de fomento (particular, e caso não for particular, então público e vice versa), um estudante de Matemática é indacado pela pergunta informal “Você estudou em escola pública ou particular?”, e ele responde: -”Sim ”. Mesmo parecendo estranho, do ponto de vista da linguagem de conjuntos ele respondeu corretamente. Na linguagem das sentenças matemáticas, o “ou” usualmente aparece denotado por $\vee$, enquanto o “e” aparece denotado por $\wedge$.

Entre as propriedades das relações de união e intersecção temos trivialmente a propriedade comutativa. Além disso, referente ao raciocínio dedutivo, isto é, estas relações associadas á relação de inclusão podemos destacar, $A \subset A \cup B$ (ou $B \subset A \cup B$) e $A \cap B \subset A$ (e também $A \cap B \subset B$).

Já a demonstração por contra positiva pode ser vista como um caso particular de demonstração de redução ao absurdo. Suponha que queremos mostrar $P \Rightarrow Q$. Neste caso isto é equivalente á $\neg Q \Rightarrow \neg P$ que por sua vez é equivalente á $P \wedge \neg Q \Rightarrow P \wedge \neg P = \emptyset$.

Juntando as relações de união e intersecção com as relações de inclusão e conceito de conjunto complementar, temos as leis de Morgan, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Aqui as uniões ou intersecções podem ser quaisquer inclusive infinitas ou não enumeráveis. Estas propriedades são a base de negação de sentenças compostas de mais uma sentença.

3 Conclusão

Em diversas situações, transformar as propriedades ou condições em conjuntos e então olhar as implicações lógicas das mesmas como inclusão de conjuntos pode tornar as argumentações nas demonstrações de proposições matemáticas mais simples.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. *Curso de Análise – Vol. 1*. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), 2014.

A DISTRIBUIÇÃO DE IDEAIS EM CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Maria Jaqueline Mochnacz¹André Guerino Castoldi²

RESUMO

Na Teoria de Códigos, determinadas classes de conjuntos parcialmente ordenados despertam o interesse de pesquisadores devido ao estudo da contagem, da enumeração e da distribuição de ideais. Em vista disso, este trabalho explora os resultados já conhecidos e consolidados na literatura sobre a distribuição de ideais dos posets anticadeia, cadeia e hierárquico.

Palavras-chave: Relação de ordem, Classes de posets, Distribuição de ideais.

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar alguns conceitos sobre relações de ordem e a distribuição de ideais em conjuntos parcialmente ordenados, tendo como base o livro de (Filho, 1976). Além disso, o trabalho enuncia as fórmulas já existentes para a distribuição de ideais dos conjuntos parcialmente ordenados anticadeia, cadeia e hierárquico. É válido mencionar que essas são algumas das principais classes de conjuntos parcialmente ordenados estudadas na Teoria de Códigos.

Por meio de uma busca pela literatura, é possível encontrar as fórmulas da distribuição de ideais do poset anticadeia no livro de Cohen et al. (1997), do poset cadeia no artigo de Brualdi, Graves e Lawrence (1995) e do poset hierárquico que é apresentado implicitamente no artigo de Spreafico, Machado e dos Santos (2024).

RESULTADOS

Definição 1. *Seja A um conjunto não vazio. Uma relação de ordem $\preceq$ definida em A é uma relação que satisfaz as propriedades reflexiva ($\forall x \in A, x \preceq x$), transitiva ($\forall x, y, z \in A$, se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ então $x \preceq z$) e antissimétrica ($\forall x, y \in A$, se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ então $x = y$).*

Dois elementos x e y do conjunto A são **comparáveis** se, e somente se, uma das sentenças $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ for válida. Caso contrário, os elementos são chamados de **não comparáveis** ou **incomparáveis**.

Definição 2. *Seja $\preceq$ uma relação de ordem definida em um conjunto não vazio A .*

¹Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, maria-mochnacz@alunos.utfpr.edu.br;

²Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, andrecaastoldi@utfpr.edu.br

- (i) Diz-se que a relação $\preceq$ é de ordem total em A se dois elementos quaisquer de A são comparáveis. Neste caso, dizemos que A é um conjunto totalmente ordenado.
- (ii) Diz-se que a relação $\preceq$ é de ordem parcial em A se existem ao menos um par de elementos de A que não sejam comparáveis. Neste caso, dizemos que o par $P = (A, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado ou, abreviadamente, um poset.

Se A é um conjunto finito, dizemos que o poset $P = (A, \preceq)$ é finito. Nesse caso, em muitas situações vamos utilizar $A = \{1, 2, \dots, n\}$ e denotar por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Denotamos por $|P|$ o número de elementos do conjunto A .

Para representar um poset finito $P = (A, \preceq)$ frequentemente é utilizado o **diagrama de Hasse**, no qual se desenha um plano de pontos que representam os elementos de A e as comparações entre dois elementos $a, b \in A$ são feitas por meio de segmentos de reta ligando estes pontos. O ponto b está acima do ponto representando a se, e somente se, $a \preceq b$ e não existe $c \in A$ distinto de a e b tal que $a \preceq c \preceq b$.

Um conjunto totalmente ordenado é também chamado de **cadeia** e um poset é chamado de **anti-cadeia** quando quaisquer dois elementos são incomparáveis. Se um conjunto A tem cardinalidade finita n , então o poset cadeia $(A, \preceq)$ é denotado por $\mathcal{C}_n$ e o poset anticadeia $(A, \preceq)$ é denotado por $\mathcal{A}_n$.

A Figura 1, representa os posets cadeia e anticadeia com $n = 4$ através do diagrama de Hasse.



Figura 1: Poset cadeia $\mathcal{C}_4$ e poset anticadeia $\mathcal{A}_4$

A **altura** $h(a)$ de um elemento $a \in P$ é a cardinalidade da maior cadeia tendo a como elemento maximal. A altura $h(P)$ do poset é a altura máxima dentre todos os seus elementos, isto é, a cardinalidade da maior cadeia do poset P :

$$h(P) = \max\{h(a) : a \in [n]\}.$$

O i -ésimo **nível** de um poset P , denotado por Γ_i^P , é o conjunto de todos os elementos com altura i , ou seja,

$$\Gamma_i^P = \{a \in [n] : h(a) = i\}.$$

Um poset é dito **hierárquico** sobre $[n]$, se os elementos em diferentes níveis são sempre comparáveis, ou seja, se $a \in \Gamma_i^H$ e $b \in \Gamma_j^H$, temos então que $a \preceq b$ se, e somente se, $i < j$. Sejam $n_1, n_2, \dots, n_t$ inteiros positivos com $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$. Definimos $H(n; n_1, n_2, \dots, n_t)$ o poset hierárquico sobre $[n]$, com t níveis e $|\Gamma_i^H| = n_i$. A Figura 2, ilustra a representação de $H(5; 3, 2)$.

Figura 2: Poset Hierárquico $H(5;3,2)$

Em conjuntos parcialmente ordenados, o conceito de ideal e a distribuição de ideais são amplamente estudados e explorados na Teoria de Códigos. Em vista disso, é apresentada a definição de ideal e é caracterizada a distribuição de ideais em posets. Ademais, são enunciadas as fórmulas existentes para o cálculo da distribuição de ideais dos posets anticadeia, cadeia e hierárquico.

Definição 3. Um ideal do poset $P = (A, \preceq)$ é um subconjunto $I \subseteq A$ que satisfaz: se $y \in I$ e $x \preceq y$, então $x \in I$.

Dado um poset $P = (A, \preceq)$ e I um ideal de P , um elemento $x \in I$ é dito **maximal** se $x \preceq y$ implica que $y = x$. Um elemento $x \in I$ é dito **minimal** se $y \preceq x$ implica que $y = x$.

Denotamos por $\Omega_j^P(i)$ a quantidade de ideais do poset P de cardinalidade i com j elementos maximais. Para $1 \leq j \leq i \leq n$, os números $\Omega_j^P(i)$ são a **distribuição de ideais** do poset P .

Teorema 1. Seja $\mathcal{C}_n$ o poset cadeia com n elementos. Se $1 \leq i \leq n$ e $1 < j$, então

$$\Omega_1^{\mathcal{C}_n}(i) = 1 \quad e \quad \Omega_j^{\mathcal{C}_n}(i) = 0.$$

Demonstração. Com efeito, os elementos do poset cadeia são todos comparáveis, logo o poset possui apenas um único elemento maximal. Assim, para qualquer ideal I do poset cadeia $\mathcal{C}_n$ tem-se i elementos e um elemento maximal. Portanto, $\Omega_1^{\mathcal{C}_n}(i) = 1$.

Por outro lado, não existe ideal I em $\mathcal{C}_n$ que possua mais que um elemento maximal. Suponha por contradição que exista um ideal I com $1 < j$ elementos maximais. Logo, existem j que não são comparáveis, o que gera uma contradição, pois por definição do poset cadeia todos os elementos são comparáveis. Portanto, para $1 < j$ tem-se $\Omega_j^{\mathcal{C}_n}(i) = 0$. $\square$

Teorema 2. Seja $\mathcal{A}_n$ o poset anticadeia com n elementos. Se $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, então $\Omega_i^{\mathcal{A}_n}(i) = \binom{n}{i}$.

Demonstração. De fato, um ideal do poset anticadeia possui somente elementos incomparáveis, isto significa que todos os elementos são maximais de $\mathcal{A}_n$. Logo, podemos determinar a quantidade de ideais com i elementos e i elementos maximais, através da combinação dos n elementos do poset tomados i a i elementos maximais. Portanto, $\Omega_i^{\mathcal{A}_n}(i) = \binom{n}{i}$. $\square$

Teorema 3. Seja $H(n; n_1, n_2, \dots, n_t)$ o poset hierárquico com t níveis. Se $1 \leq j \leq n_k$ e $2 \leq k \leq t$, então

$$\Omega_j^H(j) = \binom{n_1}{j} \quad e \quad \Omega_j^H\left(\sum_{l=1}^{k-1} n_l + j\right) = \binom{n_k}{j}.$$

Demonstração. Seja I um ideal de $H(n; n_1, n_2, \dots, n_t)$ com $|I| = i$ elementos e j elementos maximais. Se I possui os elementos maximais no primeiro nível, então $|I| = j$, pois o primeiro nível é uma anticadeia. Logo, $\Omega_j^H(j) = \binom{n_1}{j}$.

Se I possui elementos maximais j pertencentes ao segundo nível, então pela hierarquia do poset hierárquico, cada elemento do segundo nível é comparável com todos os elementos do primeiro nível. Assim, o ideal I possui $i = n_1 + j$ elementos.

No poset hierárquico, cada elemento de um nível é comparável com todos abaixo dele. Assim, em um ideal com j elementos maximais tem-se que os j elementos pertencem a um mesmo nível. Além disso, o número de elementos de I é igual aos j elementos maximais em um certo nível mais todos os elementos abaixo deles, ou seja, $i = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + j$. Assim, todo ideal I com j elementos maximais no nível k tem $i = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + j$ elementos. Agora, para determinar a quantidade de ideais é necessário conhecer o número de elementos maximais que o ideal possui. Como $1 \leq j \leq n_k$, podemos escolher j elementos maximais do nível k de $\binom{n_k}{j}$ maneiras, pois o nível k é uma anticadeia. Portanto, em cada nível do poset hierárquico temos que $\Omega_j^H\left(\sum_{l=1}^{k-1} n_l + j\right) = \binom{n_k}{j}$, para $1 \leq j \leq n_k$. $\square$

CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho, foram apresentadas as distribuições de ideais dos posets anticadeia, cadeia e hierárquico e as respectivas fórmulas para calcular a distribuição de ideais que já são conhecidas na literatura. Além disso, no trabalho de Castoldi e Monte Carmelo (2025) é explorada a distribuição de ideais do poset Neiderreiter-Rosenbloom-Tsfasman (NRT). Ademais, não foram encontradas as distribuições de ideais para os conjuntos parcialmente ordenados cerca e coroa. Logo, o estudo das distribuições de ideais dessas classes se torna uma pesquisa interessante para futuros trabalhos acadêmicos na área de Matemática Discreta e Combinatória.

REFERÊNCIAS

- BRUALDI, R. A.; GRAVES, J. S.; LAWRENCE, K. M. Codes with a poset metric. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 147, n. 1-3, p. 57–72, 1995.
- CASTOLDI, A. G.; Monte Carmelo, E. L. On the number of ideals of the Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman poset and lower bounds on covering codes. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Springer, v. 71, n. 2, p. 2135–2153, 2025.
- COHEN, G. et al. *Covering codes*. Amsterdam: Elsevier, 1997.
- FILHO, E. de A. *Teoria elementar dos conjuntos*. São Paulo: Nobel, 1976.
- SPREAFICO, M. V. P.; MACHADO, R. A.; dos Santos, O. J. N. T. N. On covering problems in hierarchical poset spaces. *Advances in Mathematics of Communications*, v. 18, n. 5, p. 1471–1479, 2024.

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Alana Tecchio Galon¹Gilson Tumelero²

Neste trabalho iremos abordar de forma simples como podemos usar a transformada de Laplace para determinar uma equação que nos permitirá visualizar o gráfico e por consequência seu comportamento da frequência vibracional ao longo do tempo.

Palavras-chave: Vibrações, Transformada de Laplace, Ressonância.

Vibrações mecânicas ou oscilação são quaisquer movimentos que se repitam após um intervalo de tempo. Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor). A Equação que descreve o movimento de um sistema vibratório varia de acordo com a segunda lei de Newton:

$$\frac{d}{dt}(mx') = F_R; \quad (1)$$

em que F_R denota a força resultante de todas aquelas aplicadas ao objeto, temos assim:

- A força peso $w = mg$ da massa sempre agindo para baixo.
- A mola exerce uma força $F_m = -kx$, que pela lei de Hooke, é tida como proporcional ao alongamento total (o sinal negativo é explicado pelo fato dessa força ser restauradora, isto é, atuar de modo a tentar restabelecer a posição de equilíbrio do sistema), em que a constante $k > 0$ depende apenas da mola.
- Consideraremos a existência de atrito proporcional à velocidade, dado por $F_a = -\lambda x'$, em que $\lambda > 0$ é uma constante. Esta força de amortecimento, ou resistência tem o sinal negativo devido ao fato dessa força atuar em direção contrária ao movimento.
- Finalmente, há a força externa F , sendo uma função qualquer, de modo que a força resultante é $F_R = -\lambda x' - kx + F$. Vamos supor que, no instante $t = 0$, o objeto esteja na posição de equilíbrio (isto é, $x(0) = 0$) e em repouso (ou seja, $x'(0) = 0$).

¹Alana Tecchio Galon do Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, alana.2005@alunos.utfpr.edu.br

²Gilson Tumelero do Departamento Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, gilson.t@utfpr.edu.br

Chegamos assim ao problema reescrito:

$$mx''(t=0) = -\lambda x'(t=0) - kx(t=0) + F \quad (2)$$

$$mx''(t=0) + \lambda x'(t=0) + kx(t=0) = F \quad (3)$$

Para a existência da Transformada de Laplace precisamos de uma função $f(t)$ que é dita seccionalmente contínua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$, se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos, além de que a função $f(t)$ é de ordem exponencial se existem constantes c , tal que, $M > 0$ e $T > 0$, sendo, $|f(t)| \leq M e^{ct}$, para todo $t > T$.

Ao analisarmos estas condições vemos que nossas equações de movimento se encaixam de modo que em quase todos os casos convirja, apenas dependendo da equação do movimento da força externa, sendo assim é possível aplicarmos a transformada e sua inversa para os estes problemas.

Imaginando a equação dada pela segunda lei de Newton em um caso estático

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \quad (4)$$

teremos alguns casos diferentes de frequência que podem ser determinados por esta EDO.

Sistema sub-amortecido são os casos em que o valor de $\lambda^2 - 4mk < 0$, e portanto, teremos para essa condições uma solução geral baseada em senos e cossenos:

$$x_h(t) = Re^{\frac{-\lambda t}{2m}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4mk}}{2m}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4mk}}{2m}\right) \right) \quad (5)$$

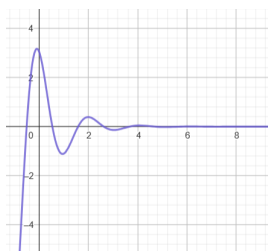


Figura 1: Gráfico dado pela equação $x(t) = 3e^{-t} \sin(3t)$ mostrando um sistema sub amortecido.

Sistema Criticamente Amortecido, os caso em que o valor de $\lambda^2 - 4mk = 0$, teremos assim raízes $s_1 = s_2 = \frac{-\lambda}{2m}$. Tendo sua solução geral igual:

$$x_h(t) = Ae^{\frac{-\lambda t}{2m}} + Be^{\frac{-\lambda t}{2m}}$$

Sistema-Superamortecido em que o valor de $\lambda^2 - 4mk > 0$ onde sua solução geral é portanto:

$$x_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (6)$$

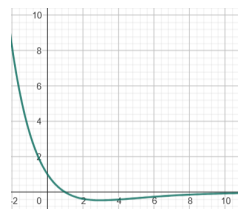


Figura 2: Gráfico dado pela equação $x(t) = e^{-\frac{t}{2}} - te^{-\frac{t}{2}}$ mostrando um sistema criticamente amortecido.

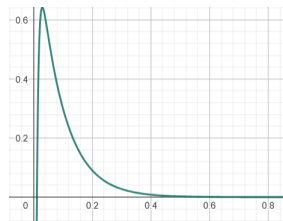


Figura 3: Gráfico dado pela equação $x(t) = e^{-12t} - 5e^{-150t}$ mostrando um sistema super-amortecimento.

O fenômeno conhecido por batimento é o resultado da superposição de duas ondas que se propagam numa mesma direção com frequências ligeiramente diferentes. Para descrevermos este fenômeno, consideremos duas ondas de amplitudes iguais, propagando-se num meio (por exemplo, o ar) e na mesma direção, porém com frequências ligeiramente diferentes, ω e ω_0 .

Consideremos agora que a força externa F seja dada por $F_0 \cos \omega t$. Isso quer dizer que o módulo máximo dessa força é $F_0 > 0$ e que essa força varia com $t \geq 0$ como em $\cos(\omega t)$. Consideremos também $\omega_0 \neq \omega$. A equação:

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Com nossos valores iniciais $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$, resulta a solução da EDO, (usaremos a Transformada de Laplace neste caso, para maior facilidade usaremos as tabelas disponíveis em Dennis G. Zill, *Equações Diferenciais: Volume 2*, Pearson Universities, 2000.pg.2-3. Teremos assim a seguinte solução final:

$$f(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \quad (7)$$

Essa solução nos gera o seguinte gráfico:

Ressonância é um fenômeno físico que ocorre quando uma força aplicada sobre um sistema que possui frequência igual ou muito próxima da frequência fundamental desse sistema. A ressonância acaba por ocasionar um aumento na amplitude de oscilação maior do que aquele ocasionado por outras frequências.

Consideremos agora que a força externa F seja dada por $F_0 \cos \omega t$. Isso quer dizer que o módulo máximo dessa força é $F_0 > 0$ e que essa força varia com $t \geq 0$ como $\cos(\omega t)$. Consideremos também $\omega_0 = \omega$.

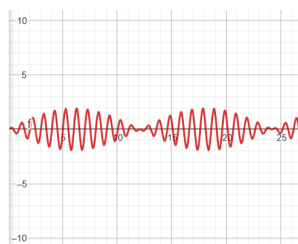


Figura 4: Gráfico Batimento - Neste caso usamos um valor próximo entre $\omega = 0.95$ e $\omega_0 = 1$ e para as nossas constantes $F_0 = m = 1$

A equação:

$$x'' + \omega^2 = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Com os valores iniciais $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$, no caso em que $\omega \neq \omega_0$, obtendo-se a solução da EDO, usaremos a Transformada de Laplace, teremos assim a seguinte solução final:

$$f(t) = \frac{F_0}{2m\omega} t \sinh(\omega t) \quad (8)$$

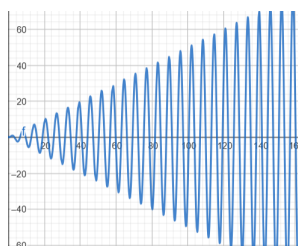


Figura 5: Gráfico Ressonância - Neste caso usamos $\omega = \omega_0 = 1$ e para as nossas constantes $F_0 = m = 1$

REFERÊNCIAS

BOYCE, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno* – ed.8. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ZILL, M. R. *Equações Diferenciais* – vol.1. Person Macron Books, 1970.

ZILL, M. R. *Equações Diferenciais* – vol.2. Person Macron Books, 1970.

RAO, S. *Vibrações Mecânicas* – ed.4. Person Macron Books, 1970.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Hemely Heidemann Fontanella ¹Dra. Marieli Musial Tumelero ²

RESUMO

Este trabalho apresenta a aplicação de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem na modelagem de sistemas físicos. Foram estudados dois casos: a queda de corpos com resistência do ar e o circuito elétrico RC, modelados matematicamente e comparados a leis e fórmulas físicas conhecidas. Os resultados obtidos mostraram-se consistentes com o comportamento esperado, validando a eficiência da abordagem adotada.

Palavras-chave: Aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias, Circuito RC, Queda dos corpos com resistência do ar.

Contextualização

Equações Diferenciais Ordinárias, EDOs, aparecem em variadas áreas da ciência, como física, biologia e engenharia, sempre que buscamos modelar um problema com variações de grandezas ao longo do tempo ou outra única variável independente.

Ao descrevermos um problema, relacionando funções e suas derivadas, somos capazes de compreender fenômenos dinâmicos e também prever o comportamento futuro a partir de condições iniciais, que se aproximam da situação em questão.

Este trabalho tem como objetivo apresentar duas aplicações de EDOs, em diferentes áreas do conhecimento, destacando sua importância na modelagem matemática e na resolução de problemas práticos.

A primeira, uma aplicação muito utilizada em física: queda de corpos. Iremos, de maneira simplificada, utilizando os conceitos de EDO e cálculo, deduzir a fórmula física que aprendemos no ensino médio (equação do movimento uniformemente variado). O segundo exemplo é uma aplicação de EDO de primeira ordem num circuito elétrico RC³. Para este, usamos a teoria de EDO para resolver o problema e posteriormente utilizamos o laboratório para fazermos a verificação dos dados.

Neste trabalho, omitiremos conhecimentos iniciais de EDO, bem como conceitos e aplicações de Álgebra Linear que serão citados, atendo-nos apenas a duas definições e exemplificação com aplicações

¹ Acadêmica do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, hemelyfontanella@alunos.utfpr.edu.br;

² Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, marieli@utfpr.edu.br.

³ Circuito elétrico composto por um capacitor e um resistor associados em série e alimentados por uma fonte de tensão.

de EDO. O leitor interessado poderá buscar aprofundamento adicional sobre esses conceitos em referências como Boldrini et al. (1984), Bronson (1977), Zill e Cullen (2001). Além disso, destacamos que as definições a seguir foram retiradas do livro Bronson (1977), bem como as adaptações dos exemplos.

Formalmente, temos:

Definição 1: Uma equação diferencial é chamada *ordinária* (E.D.O) se a função incógnita depende de apenas uma variável independente.

Definição 2: Uma *solução* de uma equação diferencial na função incógnita y e na variável independente x , no intervalo I , é uma função $y(x)$ que verifica identicamente a equação para todo x em I .

Queda de corpos com resistência do ar: modela-se o movimento de um corpo de massa m em queda sob a ação da gravidade g e de uma força de resistência proporcional à velocidade kv . Adota-se o sentido “para cima” como positivo e considera-se que a resistência do ar se opõe ao movimento do corpo. Essa configuração leva a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja solução descreve a velocidade do corpo ao longo do tempo considerando os efeitos do atrito com o ar.

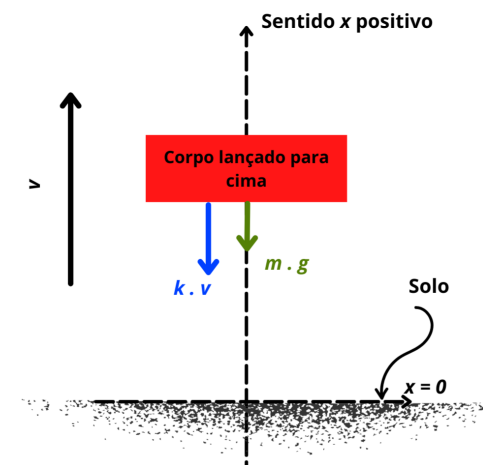


Figura 1: Corpo com resistência do ar.
Elaboração própria.

Exemplo 1: Lança-se um corpo de massa m verticalmente para cima, com velocidade inicial v_0 . Se a resistência do ar é proporcional à velocidade, vamos determinar:

a) a equação do movimento no sistema de coordenadas a seguir.

Pela segunda lei de Newton $m \cdot \frac{dv}{dt} = F$, considerando o eixo orientado para cima: $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$. Dividindo ambos os lados por m , obtemos a equação diferencial do movimento:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{kv}{m}.$$

b) uma expressão para a velocidade do corpo no instante t .

A equação diferencial é linear $\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = -g$ e pode ser resolvida com o fator integrante $\mu(t) = e^{\frac{k}{m}t}$. Desta forma, temos

$$v(t)e^{\frac{k}{m}t} = -g \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C \Rightarrow v(t) = -\frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Aplicando a condição inicial $v(0) = v_0$:

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

- c) o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

A altura máxima ocorre quando $v(t) = 0$. Assim

$$-\frac{k}{m}t = \ln\left(\frac{\frac{mg}{k}}{v_0 + \frac{mg}{k}}\right) \Rightarrow t = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right).$$

Portanto

$$t_{\text{máx}} = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right).$$

- d) Suponha que a massa do corpo seja $m = 2,0\text{ kg}$ e a velocidade inicial seja $v_0 = 20\text{ m/s}$. Desprezando a resistência do ar, determine a expressão para a velocidade do corpo no instante t e o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

Se desprezarmos a resistência do ar, a única força atuando na direção vertical é o peso, de módulo mg , para baixo. A aceleração é constante e igual a $-g$, então o movimento é uniformemente retardado.

A equação da velocidade é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow v(t) = v_0 - gt \Rightarrow v(t) = 20 - 9,8t.$$

A altura máxima ocorre quando a velocidade se anula:

$$v(t_{\text{máx}}) = 0 \Rightarrow v_0 - gt_{\text{máx}} = 0 \Rightarrow t_{\text{máx}} = \frac{v_0}{g} \approx 2,04\text{ s}.$$

Circuitos elétricos RC: são circuitos compostos por um resistor (de resistência R , em ohm, Ω) e um capacitor (de capacitância C , em farad, F), nos quais a carga elétrica $q(t)$ ou a corrente elétrica $i(t)$ é descrita por uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Esse modelo é fundamental para analisar o comportamento de circuitos em regime transitório, sendo amplamente aplicado no estudo de tempo de carga e descarga de capacitores, além de aplicações em filtros passa-altas e passa-baixas em sistemas eletrônicos.

Exemplo 2: Um circuito RC tem uma força eletromotriz de 5 volts, resistência de 10^6 ohms, capacitância de 0,0047 farad e inicialmente nenhuma carga no capacitor. Determinaremos:

- a) A equação da carga no circuito em função do tempo t ;

A equação diferencial ordinária para a carga $q(t)$ no capacitor em um circuito RC é dada por:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{4700}q = 5 \cdot 10^{-6}$$

Resolvendo esta equação e aplicando a condição inicial $q(0) = 0$ (capacitor descarregado):

$$q(t) = 2,35 \cdot 10^{-2} \left(1 - e^{-t/4700}\right).$$

- b) A equação da corrente no circuito em função do tempo t ($i(t) = \frac{dq}{dt}$)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{2,35 \cdot 10^{-2}}{4700} e^{-t/4700} \approx 5 \cdot 10^{-6} e^{-t/4700}.$$

Com essa solução, podemos observar que a corrente é transitória, pois, ao tomar o limite quando $t \rightarrow \infty$, obtemos $I(t) \rightarrow 0$.

Além disso, observa-se que a carga $q(t)$ tende a $2,35 \cdot 10^{-2} \text{ C}$, que corresponde ao regime permanente (ou estacionário), quando o capacitor está completamente carregado.

As figuras a seguir foram desenvolvidas em linguagem Python, favorecendo a visualização gráfica do comportamento das funções analisadas. A figura 3 mostra o registro do experimento no aparelho Osciloscópio.

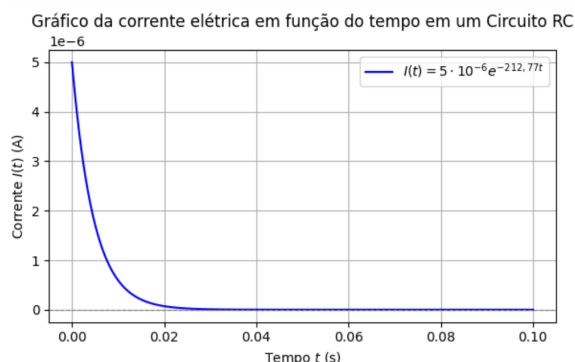


Figura 2: Gráfico da corrente elétrica $i(t) \approx 5 \cdot 10^{-6} e^{-t/4700}$ em um circuito RC. Elaboração própria

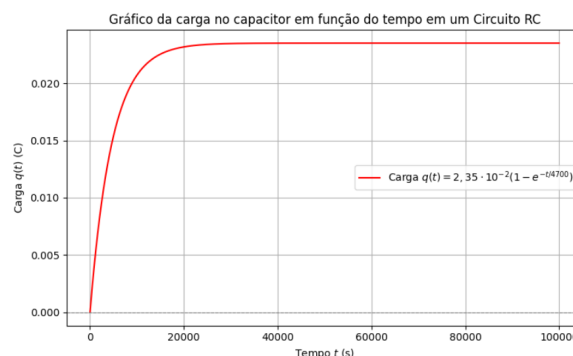


Figura 3: Gráfico da carga no capacitor $q(t) = 2,35 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/4700})$ em um circuito RC. Elaboração própria

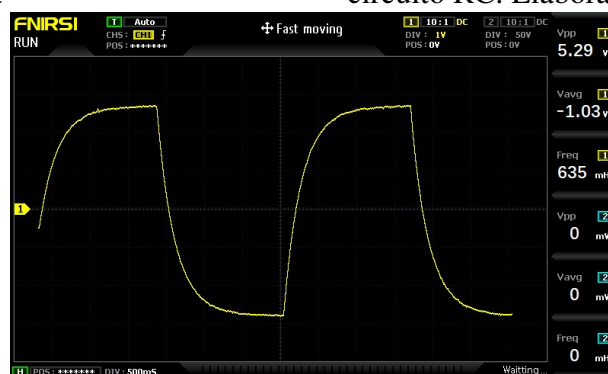


Figura 4: Registro do experimento de medição de tensão do circuito RC no aparelho Osciloscópio. Elaboração própria.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. ampl. e rev.. ed. São Paulo, SP: Editora Harbra, 1984.
- BRONSON, R. *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro, RJ: McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1977. Revisado por Roberto Romano.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais – Volume 1*. 3. ed.. ed. São Paulo, SP: Makron Books, 2001.

AS σ -ÁLGEBRAS E SUAS APLICAÇÕES

Eduardo Furlan¹Cleonis Viater Figueira²

RESUMO

Este trabalho assume conhecimento sobre σ -álgebras e exemplos fundamentais como as álgebras trivial e discreta. Mostramos a construção de σ -álgebras geradas por coleções de conjuntos, incluindo demonstrações para casos específicos. Finalmente, discutimos o papel indispensável da σ -álgebra em campos aplicados como a Probabilidade e Machine Learning.

Palavras-chave: Espaço de probabilidade, Teoria da Medida, σ -álgebra.

1 Introdução

Na base da teoria da probabilidade e da teoria da medida encontra-se um conceito que, embora abstrato, é fundamental para a construção dessas áreas: a σ -álgebra. Uma σ -álgebra sobre um conjunto Ω é uma coleção de seus subconjuntos que contém o próprio Ω e é fechada sob as operações de complementação e união contável. A compreensão da σ -álgebra é o primeiro passo para estudar espaços de probabilidade, entender a integral de Lebesgue e validar os fundamentos teóricos de muitos algoritmos de aprendizado de máquina. O objetivo deste trabalho é explorar suas propriedades através de exemplos e demonstrações, ilustrando sua importância em diversas aplicações.

2 A σ -Álgebra Gerada

Raramente definimos uma σ -álgebra listando todos os seus elementos. Em vez disso, especificamos uma coleção $\mathcal{E}$ de subconjuntos de "interesse" e procuramos a menor σ -álgebra que contenha todos eles. Essa é chamada de " σ -álgebra gerada por $\mathcal{E}$ ", denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. Conforme discutido por Rolla e Lima (2021), $\sigma(\mathcal{E})$ é a única σ -álgebra que satisfaz:

1. $\sigma(\mathcal{E})$ é uma σ -álgebra.
2. $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ (ela contém a coleção geradora).
3. Se $\mathcal{F}$ é qualquer outra σ -álgebra tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, então $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$ (ela é a menor de todas).

¹Acadêmico do Curso de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, efurlan@alunos.utfpr.edu.br;

²Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, cleonis@utfpr.edu.br.

2.1 Exemplo: Gerada por um Único Conjunto

Seja $\mathcal{E} = \{A\}$, onde A é um subconjunto de Ω . A σ -álgebra gerada por este único conjunto é $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. Vamos demonstrar que esta é, de fato, a menor σ -álgebra que contém A .

1. Verificação de que $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ é uma σ -álgebra:

- (a) Ela contém Ω por definição.
- (b) É fechada sob complemento: o complemento de $\emptyset$ é Ω , o de Ω é $\emptyset$, o de A é A^c , e o de A^c é A . Todos estão em $\mathcal{G}$.
- (c) É fechada sob uniões (finitas ou contáveis): qualquer união de conjuntos em $\mathcal{G}$ resulta em um conjunto que já está em $\mathcal{G}$ (e.g., $A \cup A^c = \Omega$).

2. Verificação de que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$: Isso é imediato, pois $A \in \mathcal{G}$.

3. Verificação da Minimalidade: Seja $\mathcal{F}$ qualquer σ -álgebra que contenha $\mathcal{E}$ (ou seja, $A \in \mathcal{F}$). Pelas propriedades de σ -álgebra, $\mathcal{F}$ deve também conter Ω , A^c , e $\emptyset$. Portanto, qualquer σ -álgebra que contém A deve necessariamente conter todos os elementos de $\mathcal{G}$, o que implica que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Isso prova que $\mathcal{G}$ é a menor de todas, logo $\sigma(\{A\}) = \mathcal{G}$.

2.2 Exemplo: Gerada por uma Partição Finita

Considere $\mathcal{E} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma coleção de subconjuntos disjuntos de Ω cuja união é Ω (uma partição). A σ -álgebra gerada por $\mathcal{E}$ é a coleção $\mathcal{A}$ de todas as uniões possíveis formadas pelos conjuntos A_k , incluindo o conjunto vazio. A prova de que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ pode ser encontrada em Rolla e Lima (2021).

3 Aplicações em Diferentes Domínios

3.1 Função de Dirichlet

A função de Dirichlet, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que é definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

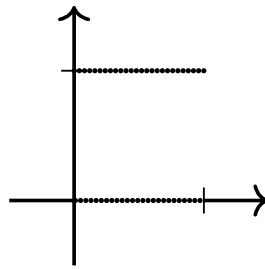


Figura 1: Gráfico da Função de Dirichlet

é uma famosa função que não é integrável pela integral de Riemann, porém, é integrável pela integral de Lebesgue. Um elemento fundamental para a integral de Lebesgue é a σ -álgebra, que fundamenta a teoria da medida ao definir a classe dos conjuntos mensuráveis.

No contexto da reta, a σ -álgebra de Borel ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$) introduz a medida de Lebesgue, em que o conjunto dos números racionais, por ser contável, possui medida nula. A integral de Lebesgue, por sua construção, desconsidera conjuntos de medida nula. Assim, o seu valor é calculado como $1 \cdot \text{medida}(\mathbb{Q}) + 0 \cdot \text{medida}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

3.2 Modelo Bayesiano

No contexto de Modelos Bayesianos (Billingsley, 1995), seja por base o modelo de probabilidade para descrever a chance de um paciente ter uma doença com base em um exame laboratorial, como segue: Variável aleatória D : o paciente tem (1) ou não tem (0) a doença; Variável aleatória T : o resultado do teste é positivo (1) ou negativo (0).

Para definir probabilidades condicionais como $P(D = 1 \mid T = 1)$, precisamos formalizar um espaço de probabilidade com base em uma σ -álgebra, que determina os subconjuntos (eventos mensuráveis) para os quais podemos atribuir probabilidades de forma consistente.

Se o espaço amostral é $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, representando todas as combinações de D e T , então uma σ -álgebra possível é: $\mathcal{F}$ = conjunto de todos os subconjuntos de Ω , incluindo: $\emptyset$, Ω , $\{(1, 1)\}$, evento "tem doença e teste positivo", $\{(1, 0), (1, 1)\}$, evento "tem doença (independentemente do teste)", etc.

Esta σ -álgebra garante que se podemos medir um evento, também podemos medir seu complemento e uniões contáveis de eventos.

Em Bayes:

$$P(D = 1 \mid T = 1) = \frac{P(T = 1 \mid D = 1) \cdot P(D = 1)}{P(T = 1)}$$

Para essa fórmula fazer sentido, as probabilidades envolvidas (marginais e condicionais) devem estar bem-definidas em relação à σ -álgebra, ou seja, os eventos $D = 1$, $T = 1$ e sua interseção precisam estar em $\mathcal{F}$.

3.3 Machine Learning e Inteligência Artificial

Embora um praticante de ML raramente manipule uma σ -álgebra diretamente, sua existência é um pré-requisito teórico para a validade de quase todo o campo. A Teoria da Probabilidade, que é a linguagem da incerteza em ML, depende dela. Modelos de ML operam em espaços de características que podem ser contínuos e de altíssima dimensão.

Para que se possa afirmar rigorosamente que um dado x foi amostrado de uma distribuição de probabilidade $\mathcal{P}(X)$, o espaço de características deve ser um espaço de medida.

A σ -álgebra é o que garante que os conjuntos de dados (eventos) nesse espaço complexo possam ter uma probabilidade atribuída de forma matematicamente consistente, um conceito fundamental em reconhecimento de padrões e aprendizado de máquina (Bishop, 2006).

Veja, por exemplo, que temos um modelo para prever o preço de casas com base em suas características (como tamanho, localização e número de quartos). Suponha que usamos um modelo probabilístico, como uma regressão bayesiana, e que a variável alvo Y (preço da casa) depende das variáveis explicativas X (features).

Um objeto de estudo é investigar o comportamento da esperança condicional $\mathbb{E}[Y | X]$, ou seja, o valor esperado do preço dado as características X . Para que isso seja matematicamente bem definido, é necessário que Y seja mensurável com relação à σ -álgebra gerada por X , e denotada por $\sigma(X)$, que representa todos os eventos que podem ser inferidos com base nas features.

Quando o modelo faz previsões baseadas nas features, ele está, na prática, calculando essa expectativa condicional $\mathbb{E}[Y | \sigma(X)]$. Isso garante que: a previsão é matematicamente bem definida, é consistente com a estrutura probabilística do espaço amostral, permite aplicar teoremas e resultados teóricos importantes de forma segura.

4 Considerações finais

Sem o conceito de σ -álgebra, e conseqüentemente, suas decorrências, não saberíamos quais eventos são “legítimos” para aplicar as regras de probabilidade, e desta forma teríamos ambigüidade ou ausência de medida, o que torna cálculo da esperança matemática, da variância, ou mesmo distribuições, matematicamente inválidas.

REFERÊNCIAS

- BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. Third. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995.
- BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. [S.l.]: Springer, 2006.
- ROLLA, L. T.; LIMA, B. N. B. de. *Probabilidade*. IME-USP, 2021. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~leorolla/probabilidade/>>.

AULAS DE MATEMÁTICA NO RCO+AULAS: UMA ANÁLISE COM BASE EM DOCUMENTOS OFICIAIS E PRÁTICAS INOVADORAS

Arthur Casagrande Duarte Santana¹Janecler Aparecida Amorim Colombo²

RESUMO

Este texto baseia-se no Trabalho de Conclusão de Curso defendido apresentado pelo primeiro autor para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática. Nele, propõe-se uma análise da adequação do material digital adotado no estado do Paraná em relação aos documentos norteadores da educação brasileira, às Tendências em Educação Matemática e à práticas pedagógicas inovadoras, com foco no 6º ano do Ensino Fundamental. O estudo concluiu que, embora o material seja bem fundamentado teoricamente e esteja alinhado às diretrizes nacionais, ainda há espaço para ampliação, especialmente com a inclusão de mais aulas que adotem abordagens inovadoras, a fim de potencializar seu uso em sala de aula.

Palavras-chave: Educação, Material didático, Matemática

INTRODUÇÃO

O estado do Paraná tem adotado o uso de um material didático digital para a complementação das aulas no ensino fundamental e médio desde a pandemia de Covid-19. Inicialmente desenvolvido para aulas *online* em uma situação emergencial, este material continuou sendo utilizado nas escolas públicas estaduais após o retorno das atividades presenciais, embora adaptado para a nova realidade.

Dada sua abrangência e importância, tornou-se fundamental a análise de sua estrutura, implementação e conteúdo, objetivo do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Material digital do paraná em escolas públicas: Uma análise das aulas de matemática propostas para o 6º ano do ensino fundamental” (Santana, 2025), que é objeto da síntese apresentada neste resumo expandido.

OBJETIVO GERAL

Nesse contexto, o estudo que teve abordagem qualitativa e foi caracterizado como uma pesquisa documental, teve como objetivo geral “analisar a adequação das aulas de Matemática do 6º ano, propostas na plataforma RCO+Aulas, aos conteúdos e objetivos estabelecidos na BNCC, considerando as tendências contemporâneas em educação matemática e a promoção de práticas pedagógicas inovadoras” (Santana, 2025, p.23).

¹Egresso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, arthuredsant@gmail.com;

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a realização do trabalho, foram delimitados os principais tópicos a serem pesquisados e analisados no material, e, a partir deles, elaborados três protocolos de análise que orientaram sua investigação sobre o material didático. A pesquisa teve início com o estudo dos documentos oficiais para a educação, a saber: Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) e o Referencial Curricular do Paraná, documentos norteadores para a educação no estado.

Com base nesses documentos foi desenvolvido o Protocolo A, que estabelece 4 critérios para análise dos materiais do RCO, fundamentados nas diretrizes educacionais do Paraná e em consonância com dois eixos cognitivos definidos pelo INEP nas Matrizes de Referência de Matemática do Saeb – BNCC. O protocolo definido por Santana (2025) é apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 – Protocolo A - análise dos materiais do RCO com base nos documentos oficiais para a educação

Critério	Aspectos
A1	Faz jus aos conteúdos estabelecidos dentro dos documentos oficiais para a educação
A2	Possibilita ao estudante compreender e aplicar conceitos e procedimentos
A3	Possibilita ao estudante resolver problemas e argumentar
A4	Apresenta algum tipo de erro conceitual

Fonte: Santana, (2025)

O segundo objeto de análise foram as características das práticas pedagógicas inovadoras, que, segundo Santana (2025, p.36), buscam “pelo avanço, pela criticidade e pela dissipação de conhecimentos, culturas, valores e hábitos, a partir da prática docente”, diferenciando-se, portanto, da prática pedagógica tradicional, marcada por um viés conservador, acrítico e centralizador.

Com base nos trabalhos analisados em sua pesquisa, destacam-se sete critérios estabelecidos por Ferronato (2023). Com a interpretação destes, Santana (2025) os organiza em cinco critérios principais, com o objetivo de estabelecer o Protocolo B para análise dos materiais do RCO, fundamentado nas práticas pedagógicas inovadoras. Esse protocolo está apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Protocolo B – análise dos materiais do RCO com base nas práticas pedagógicas inovadoras

Critério	Aspectos
B1	Currículo não neutro, possibilitando a construção de conhecimentos a partir da socialização
B2	Estudante como protagonista do seu ensino, permitindo uma autoavaliação
B3	Resoluções de problemas relacionando diretamente a aprendizagem e o cotidiano
B4	Valoriza o uso de ferramentas ou tecnologias, digitais ou não digitais
B5	Preza pelo processo investigativo, além de desenvolver o raciocínio lógico

Fonte: Santana, (2025)

O terceiro e último tópico da pesquisa apresentada no TCC aborda as Tendências em Educação

¹Egresso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, arthuredsant@gmail.com;

Matemática, tema estudado ao longo da graduação, cuja escolha se deu pela familiaridade já desenvolvida com o assunto. No decorrer do trabalho, destaca-se que “as tendências em educação matemática por si só já conferem um caráter inovador para as aulas de matemática”, (Santana, 2025, p. 36), o que aproxima essa abordagem das práticas pedagógicas inovadoras analisadas anteriormente, ao promover o avanço, a criticidade e a disseminação de conhecimentos, culturas, valores e hábitos.

As tendências selecionadas por Santana (2025) para a análise foram organizadas no Protocolo C, que estabelece cinco critérios para avaliar os materiais do RCO com base nas Tendências em Educação Matemática. Esses critérios estão apresentados no Quadro 3.

Quadro 3 - Protocolo C – análise dos materiais do RCO com base nas Tendências em Educação Matemática

Critério	Aspectos
C1	Apresenta indícios sobre a tendência de Resolução de Problemas
C2	Apresenta indícios sobre a tendência de História da Matemática
C3	Apresenta indícios sobre a tendência de Etnomatemática
C4	Apresenta indícios sobre a tendência de Modelagem Matemática
C5	Apresenta indícios sobre a tendência das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs)

Fonte: Elaborado pelo autor, (2024)

Com toda a fundamentação teórica delimitada, deu-se início à coleta e à análise das informações do material RCO+Aulas, cujo acesso foi concedido por meio da professora orientadora. Com base nos protocolos de análise desenvolvidos previamente, foi elaborada uma planilha detalhada, na qual foram atribuídos os critérios estabelecidos nos protocolos para cada uma das 122 aulas de matemática do material.

As aulas analisadas foram categorizadas em grupos, conforme a unidade temática da BNCC, que mais se aproximava do conteúdo apresentado, uma vez que a plataforma utilizava classificações distintas das previstas nos documentos oficiais. A partir dessa categorização, foi desenvolvido o corpo do trabalho, culminando na elaboração do Quadro 4, que reúne os dados obtidos na pesquisa.

Quadro 4 - Relação individual e total dos critérios estabelecidos nos protocolos de análise com a quantidade de aulas em cada unidade temática.

Critério	Números (78 aulas)	Probabilidade e estatística (8 aulas)	Geometria (18 aulas)	Grandezas e medidas (18 aulas)	Total (122 aulas)
A1	78	8	18	18	122
A2	56	5	18	16	95
A3	49	3	8	12	72
A4	0	0	0	0	0
B1	15	2	3	4	24
B2	21	3	5	7	36
B3	19	4	1	7	31
B4	5	1	4	2	12
B5	30	5	7	11	53
C1	7	0	1	0	8
C2	3	0	0	2	5
C3	0	0	0	0	0
C4	2	0	0	0	2
C5	0	0	1	0	1

¹Egresso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, arthuredsant@gmail.com;

CONCLUSÕES

A partir da análise das aulas, e da elaboração do Quadro 4, foram identificados aspectos positivos e negativos relacionados à adequação, ao desenvolvimento e à utilização do material didático digital do RCO+Aulas.

Entre os aspectos positivos, destaca-se: o alinhamento de todas as aulas aos documentos oficiais para a educação, sem a presença de erros conceituais nos conteúdos matemáticos abordados. Observou-se também que todas as aulas contemplavam ao menos um dos dois eixos cognitivos estabelecidos pelo INEP nas Matrizes de Referência da BNCC.

Por outro lado, alguns pontos críticos merecem atenção. O mais significativo é a ausência de aulas que desenvolvam habilidades relacionadas à unidade temática de Álgebra, conforme previsto na BNCC.

Além disso, foi observado um número reduzido de aulas que atendem aos critérios baseados nas práticas pedagógicas inovadoras: das 122 aulas analisadas, 41 não apresentaram os critérios estabelecidos, sendo caracterizadas como aulas puramente expositivas. Outro dado preocupante é a escassa presença de elementos vinculados às Tendências em Educação Matemática, identificados em apenas 16 aulas, o que representa 13,11% do total.

A análise dos dados portanto permitiu concluir que, embora o material esteja bem fundamentado tanto nos documentos oficiais quanto em propostas didáticas mais atuais, ainda há espaço para melhorias. É recomendável ampliar o número de aulas que incorporem práticas inovadoras e tendências da Educação Matemática, de modo a potencializar a qualidade e a efetividade pedagógica do material.

REFERÊNCIAS

FERRONATTO, Thais. **PRÁTICAS PEDAGÓGICAS INOVADORAS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**. Orientadora: Professora Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo. 2023. F.66. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Tecnológica Federal Do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, 2023. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/33930>. Acesso em: 29 jul. 2025.

SANTANA, Arthur Casagrande Duarte. **MATERIAL DIGITAL DO PARANÁ EM ESCOLAS PÚBLICAS: UMA ANÁLISE DAS AULAS DE MATEMÁTICA PROPOSTAS PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2025.

¹Egresso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, arthuredsant@gmail.com;

CACHETA GEOMÉTRICA: UMA POSSIBILIDADE METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE PRISMAS E PIRÂMIDES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL II

Letícia Eduarda Zaltran Pezzini¹Marieli Musial Tumelero²

RESUMO

Cacheta geométrica é um jogo que foi desenvolvido durante o Trabalho de Conclusão de Curso, em 2022, para concluir a graduação de Licenciatura em Matemática da UTFPR - PB. O jogo surgiu como uma possibilidade metodológica para o ensino de prismas e pirâmides, voltada para o Ensino Fundamental II.

Palavras-chave: Matemática, Geometria Espacial, Cacheta Geométrica.

CARACTERIZAÇÃO

Ao refletir sobre o ensino de Geometria Espacial no Ensino Fundamental II surgem alguns questionamentos sobre os desafios que o professor de Matemática encontra ao ensinar esse conteúdo. Tais questionamentos como: “por que esse conteúdo às vezes acaba sendo deixado de lado?”, “falta de conhecimento?”, “falta de tempo durante o ano letivo?”, “esse conteúdo não é importante os alunos saberem?”. A busca por tais respostas nos motivou a pesquisar uma forma de revisar os conceitos, aprender e apoiar os alunos e professores.

Dessa maneira, o presente trabalho é fruto da pesquisa realizada durante o Trabalho de Conclusão de Curso em 2022, como requisito para concluir o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Pato Branco. Sendo assim, a importância da Geometria Espacial na vida dos sujeitos, percebeu-se, no percurso enquanto estudante, como a mesma foi deixada de lado. Uma justificativa que vem sendo posta à tona é o conteúdo deixado no fim do livro, e outro argumento é devido à ênfase dada aos professores para o ensino de Álgebra, prejudicando assim, a formação dos estudantes (Kusma, 2004, apud, Pavanello, 1993). Por outro lado, esse tema quando ensinado, acaba sendo realizado de maneira superficial e rápida, pois a unidade temática que tem mais ênfase na matriz é Números e Álgebra.

Nessa perspectiva, ao observa-se com um olhar minucioso, podemos perceber que os sólidos geométricos estão presentes em todos os momentos de nossa vida. Desde pequenos, na Educação Infantil, trabalha-se com a manipulação de objetos tridimensionais, seja em brincadeiras com a bola bem como em brincadeiras de “faz de conta”, com sucatas, entre outros.

É de fundamental importância destacar ainda, a experiência como bolsista do PIBID Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Pato Branco, na qual muitas vezes, enquanto

¹Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, UNIOESTE, Francisco Beltrão, pezzinileti@gmail.com;

²Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – PB, marieli@utfpr.edu.br

professora os ensinamentos no conteúdo de geometria espacial. Dentre eles, as dificuldades em compreender objetos tridimensionais quando trabalhado de maneira não concreta, o não conhecimento da teoria, entre outros.

A partir disso, vale ressaltar que é necessário sanar as dificuldades que vêm sendo carregadas desde a Educação Infantil, uma vez não trabalhada de maneira significativa, a compreensão do conteúdo torna-se irrelevante para a aprendizagem.

Sendo assim, pensamos em alguns recursos metodológicos para o ensino de Geometria Espacial, que auxilie o ensino e a aprendizagem.

Baseado nessa perspectiva, o problema norteador do nosso trabalho de TCC foi “Como explorar os conceitos de Geometria Espacial a partir do jogo ‘Cacheta Geométrica’?”, pois acreditamos que é possível revisar os conteúdos e conceitos vistos em sala de aula de uma forma lúdica.

Nesse sentido, a pesquisa teve como objetivo geral apresentar o material didático “jogo Cacheta Geométrica” como uma possibilidade metodológica para o ensino de Geometria Espacial.

Assim, a proposta do TCC visou colaborar com a prática dos professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental II, e pensando em sanar as dificuldades que os estudantes têm ao se deparar com a Geometria Espacial. Com o passar dos anos, percebe-se como os jogos vêm ocupando um lugar significativo nos processos de ensino e aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, é de fundamental relevância destacar o papel do professor neste processo, pois com um plano de aula bem preparado, o mesmo conseguirá transformar a aula em algo dinâmico, instigando o estudante a ser um sujeito curioso, reflexivo, autônomo, protagonista do meio ao qual está inserido.

Dessa forma, comungamos com o pensamento de Grandó o qual diz que,

A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe permite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um “todo” que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem. (GRANDÓ, 2000, p.15).

Complementando o autor já supracitado, além do jogo ser um ótimo componente para a aprendizagem, o mesmo apresenta benefícios para a comunicação interpessoal, onde os sujeitos começam a ser ativo no falar e no agir, aumentando a capacidade de interação com os demais colegas, e se sentem mais à vontade de fazer questionamentos e tirar suas dúvidas. Isso trará consequências positivas para o bem-estar pessoal e profissional. Logo, o professor pode oportunizar ao aluno uma aprendizagem significativa, onde os mesmos consigam compreender os conteúdos propostos com clareza e objetividade.

O jogo Cacheta Geométrica foi adaptado do “Jogo dos Poliedros” (Pessoa, 2019) juntamente com o jogo usual de cacheta, com o intuito de auxiliar os professores e alunos no ensino e aprendizado da Geometria Espacial.

Elaboramos um jogo composto por 32 cartas, sendo que a cada quatro cartas temos um conjunto de cartas que podem ser combinadas, as quais chamaremos de família. Cada família é um sólido

¹Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, UNIOESTE, Francisco Beltrão, pezzinileti@gmail.com;

²Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – PB, marieli@utfpr.edu.br

geométrico, sendo eles: cubo; pirâmide triangular; pirâmide quadrangular; pirâmide pentagonal; pirâmide hexagonal; prisma triangular; prisma pentagonal; e, prisma hexagonal. Totalizando assim 8 famílias. Cada família é formada pelo nome do sólido geométrico, sua figura e planificação, além de uma carta com suas características. Foram escolhidos esses sólidos supracitados, porque por exemplo, são encontrados mais comumente em nosso cotidiano. No apêndice, segue o modelo deste jogo.

Ao refletir sobre o trabalho desenvolvido durante esse período, pode-se dizer que o mesmo contribuiu de maneira significativa para a formação docente, pois esse jogo pode ser adaptado a muitos outros conteúdos e também sofrer alterações em seu formato, regras e modo de funcionamento.

Este trabalho auxiliou muito na formação acadêmica, pois para elaborar um planejamento é necessário pensar em uma estratégia metodológica. E quando for possível, se os alunos puderem manipular materiais pedagógicos antes, durante e depois da aula, isto pode trazer resultados positivos para os processos de ensino e aprendizagem.

É de fundamental relevância dizer que esse jogo não só agregou para a formação docente, mas também – e primordialmente -, sanou algumas dificuldades que a autora tinha sobre o conteúdo de Geometria Espacial, e que agora, após o estudo e construção do jogo, ficaram mais claras, especificadamente ao identificar o sólido e a sua planificação, sendo este uma das justificativas para escrever a pesquisa.

Nesse sentido, observa-se que um jogo torna-se apenas um jogo quando o mesmo não é explorado na sala de aula, assim o papel do professor é de suma importância para esse fator, pois o mesmo ao preparar a sua aula, poderá pensar no contexto ideal de aplicação da Cacheta Geométrica porque conhece a sua turma e sabe qual é momento exato para ser trabalhado esse jogo. Assim, durante a realização da mini aula, percebeu-se que o jogo pode ajudar, porém depende da organização da turma, por isso da relevância do professor em conhecer a sua turma.

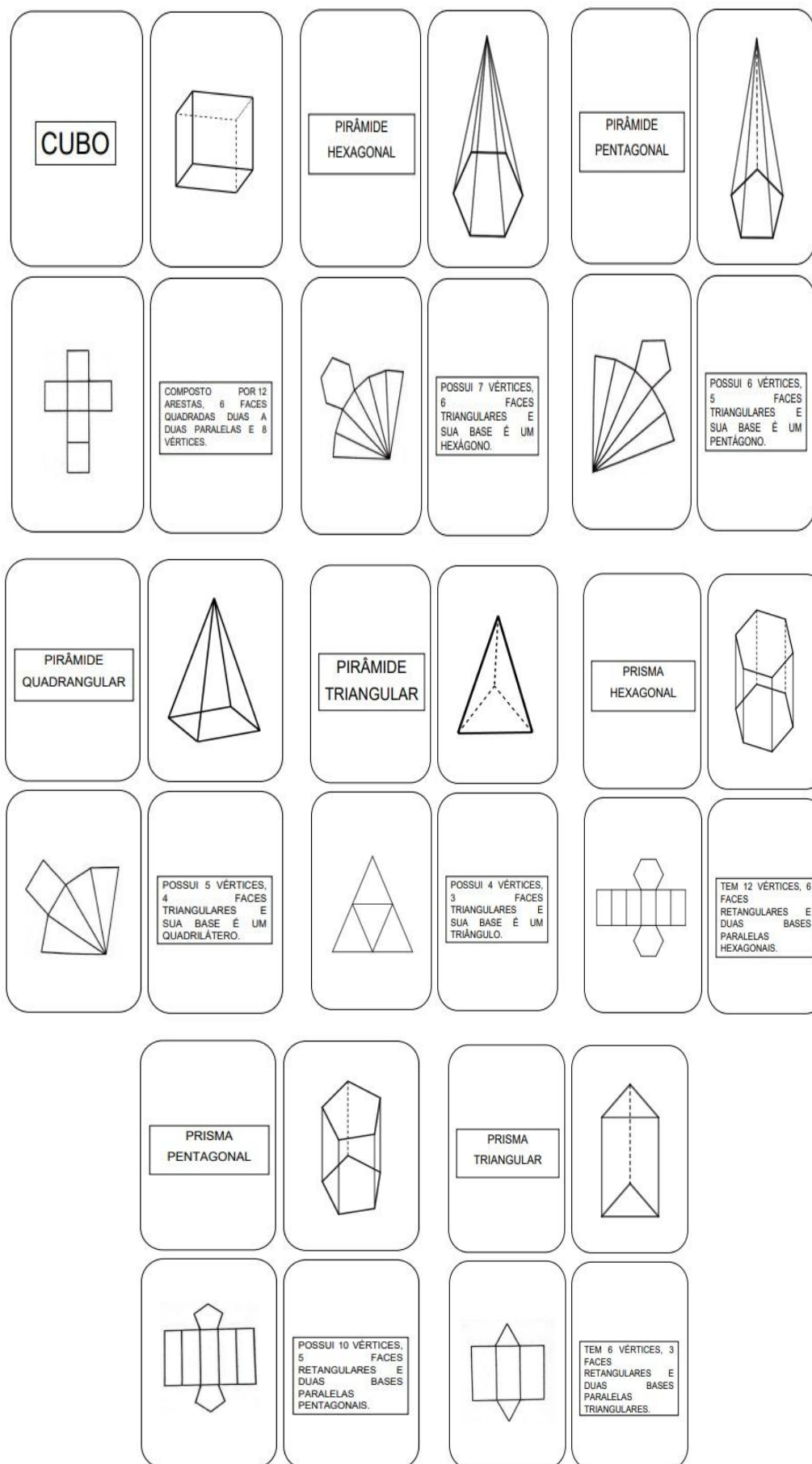
Contudo, este trabalho foi desafiador e instigante, porque ao ser desenvolvido encontrou-se desafios no decorrer do processo, principalmente ao estudar os conceitos, as características e propriedades sobre os sólidos, pois era uma das dificuldades a qual tinha-se como objetivo a ser sanada. Logo, isso motivou a buscar um recurso lúdico para contribuir para a dificuldade pessoal bem como contribuir para a formação dos demais professores que ensinam Matemática e que sentem dificuldades em compreender tal conteúdo. E por fim, sobre a aplicação do jogo ao ser amparado dos sólidos geométricos, logo observou-se quando aplicado, que a aprendizagem torna-se mais compreensiva ao ser trabalhado com os objetos concomitantemente, o objeto de estudo torna-se mais profícuo.

REFERÊNCIAS

- GRANDO, R.C. **O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- KUSMA, Cristiani. Exclusão e Inclusão da Geometria no Ensino Fundamental. 2004. 51 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática - Habilitação em Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2004. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/30377584.pdf>. Acesso em: 29 ago. 2021.
- PESSOA, Neide. Jogo dos Poliedros. Mathema, 24 maio 2019. Disponível em: <https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/jogo-dos-poliedros/>. Acesso em: 29 ago. 2021.

¹Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, UNIOESTE, Francisco Beltrão, pezzinileti@gmail.com;

²Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – PB, marieli@utfpr.edu.br



¹Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, UNIOESTE, Francisco Beltrão, pezzinileti@gmail.com;

²Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – PB, marieli@utfpr.edu.br

CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER E O MÉTODO SQP PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR COM RESTRIÇÕES

Gabriela Fernanda Schmoller¹Adriano Rodrigo Delfino²

RESUMO

Devido o avanço tecnológico e a busca por economia de tempo e dinheiro, os problemas de otimização vem recebendo grande importância no meio acadêmico. Nesse cenário, a Programação Não Linear (PNL) se destaca como ramo da Matemática Aplicada voltado à resolução de problemas de minimização ou maximização de funções objetivo com restrições não lineares.

Palavras-chave: otimização não linear, condições de KKT, programação quadrática sequencial.

Nas áreas da Matemática Aplicada e Pesquisa Operacional, Programação Não-Linear (PNL) é um ramo da Programação Matemática na Otimização que busca minimizar ou maximizar uma função objetivo sujeito a um conjunto de restrições não lineares de igualdade ou desigualdade.

A Otimização é uma sub-área da Matemática relativamente recente, embora tenha raízes em resultados antigos, como o cálculo de derivada de funções, seu desenvolvimento e crescimento significativo ocorreu no século XX. A Otimização consiste em modelar matematicamente problemas, com o objetivo de obter uma solução ótima ou, no mínimo, a melhor possível.

Dado um propósito real, usa-se uma função f para descrevê-lo. Essa função está definida em algum espaço e preserva alguma característica. De maneira semelhante, é possível modelar as restrições do problema usando funções. De forma geral, o problema de Otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

em que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções que representam as restrições, que fornecem um conjunto viável Ω para o problema (1).

O objetivo deste trabalho é descrever um método de resolução para o problema (1), considerando f uma função diferenciável e convexa, h o conjunto de restrições de igualdade e g o conjunto de restrições de desigualdade, ambos diferenciáveis. Para tanto, deve-se estabelecer condições necessárias e suficientes para que o método consiga determinar uma solução do problema (1), caso exista.

¹Egressa do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, gabrielaschmoller@alunos.utfpr.edu.br;

²Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, delfino@utfpr.edu.br.

Inicialmente em otimização, as condições de Kuhn-Tucker são condições necessárias de primeira ordem para que uma solução de um problema de programação não linear seja ótima. Essas condições foram publicadas por Kuhn e Tucker (1951). Posteriormente, foi descoberto que Willian Karush já havia obtido esse resultado em sua dissertação de mestrado em 1939. Assim, atualmente tais condições são conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplesmente, condições de KKT.

Teorema 1 (Teorema de Karush-Kuhn-Tucker) *Seja $\bar{x} \in D$ um minimizador local do problema (1) e suponha que $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$. Então existem vetores $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ tais que*

$$-\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \bar{\mu}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}),$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0, i \in I(\bar{x})$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I(\bar{x}).$$

Os multiplicadores $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ são conhecidos como multiplicadores de Lagrange.

O método para resolver um problema de PNL neste trabalho será o de Programação Quadrática Sequencial (SQP), sendo considerado um dos métodos mais eficazes para resolução de problemas de otimização não linear com restrições, o qual busca resolver o problema de maneira aproximada, ou seja, a cada iteração do método, a solução do problema inicial vai sendo aproximada por uma sequência de pontos obtidos através da solução de problemas fáceis. Este método permite a linearização de problemas não lineares em torno do ponto corrente, formando assim um sistema de equações lineares, cuja solução é tomada como próximo ponto da sequência.

Considere o seguinte problema dado por (1) e sejam $A(x)$ e $B(x)$ as matrizes Jacobianas de h e g , respectivamente, no ponto x . Considere também a função Lagrangeana associada ao problema (1), sendo μ e λ os multiplicadores de Lagrange. A Hessiana parcial associada a Lagrangeana, $\nabla_{xx}^2 L(x, \mu, \lambda)$ será denotada por $H(x, \mu, \lambda)$.

Desta forma, dados x^k , μ^k e λ^k o método SQP consiste em resolver em cada iteração o seguinte subproblema quadrático:

$$\begin{aligned} \min \quad & L(x^k, \mu^k, \lambda^k) + \nabla_x L(x^k, \mu^k, \lambda^k)^T d + \frac{1}{2} d^T H(x^k, \mu^k, \lambda^k) d \\ \text{s.a.} \quad & A(x^k) d + h(x^k) = 0 \\ & B(x^k) d + g(x^k) \leq 0 \end{aligned}, \quad (2)$$

que sob certas hipóteses apresenta solução única d^k . Define-se então $x^{k+1} = x^k + d^k$ e calcula-se os multiplicadores de Lagrange $\mu^{k+1} = \xi^k$ e $\lambda^{k+1} = \delta^k$, em que ξ^k e δ^k são os multiplicadores de Lagrange associados ao problema (2). Dessa maneira, espera-se encontrar uma sequência com algum ponto de acumulação $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$, que satisfaça as condições de otimalidade de primeira ordem para o problema (1)

definidas pelo Teorema 1.

O algoritmo para resolução do problema (1) é:

Algorithm 1 Programação Quadrática Sequencial

Ensure: $k = 0, (x^0, \mu^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$

- 1: **while** $L'(x^k, \mu^k, \lambda^k) \neq 0$ **do**
 - 2: Resolva o problema (2), obtendo uma solução primal-dual (d^k, ξ^k, δ^k)
 - 3: Faça $x^{k+1} = x^k + d^k$
 - 4: Defina $\mu^{k+1} = \xi^k$
 - 5: Defina $\lambda^{k+1} = \delta^k$
 - 6: $k = k + 1$
 - 7: **end while**
-

Obter uma solução primal-dual (d^k, ξ^k, δ^k) do subproblema quadrático (2), é equivalente a resolver as condições do Teorema 1 para este subproblema, ou seja, resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} H(x^k, \mu^k, \lambda^k)d + A(x^k)^T \xi + B(x^k)^T \delta &= -\nabla_x L(x^k, \mu^k, \lambda^k) \\ A(x^k)d &= -h(x^k) \\ B(x^k)d &= -g(x^k) \end{cases} \quad (3)$$

Para um melhor entendimento desta teoria e do desenvolvimento do método SQP, aborda-se a resolução do seguinte problema quadrático do $\mathbb{R}^2$, adaptado da obra de Ribeiro e Karas (2013).

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^2 - x_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

com $x^0 = (2, -1)$ e $\mu^0 = 1$.

Podemos representar geometricamente o problema como:

Figura 1: Representação geométrica do problema 4

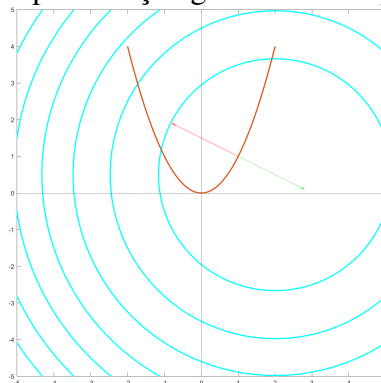


Figura 2: Autoria própria

Algorithm 2 Código para resolver o problema com SQP

```

1  % Função objetivo
2  objFunc = @(x) (x(1) - 2)^2 + (x(2) - 0.5)^2;
3
4  % Função de restrição (não linear de igualdade)
5  nonlcon = @(x) deal([], x(1)^2 - x(2));
6
7  % Ponto inicial
8  x0 = [2, -1];
9
10 % Configurações de opções
11 options = optimoptions('fmincon', 'Algorithm', 'sqp', 'Display', 'iter');
12
13 % Resolvendo o problema
14 [x, fval, exitflag, output, lambda] = fmincon(objFunc, x0, [], [], [], [], [], [], nonlcon, options);
15
16 disp('Solução:');
17 disp(x);
18 disp('Valor da função objetivo:');
19 disp(fval);
20 disp('Multiplicadores de Lagrange finais:');
21 disp(lambda);

```

Solução:

1.0000 1.0000

Valor da função objetivo:

1.2500

Multiplicadores de Lagrange finais:

- eqlin: [0x1 double]
- eqnonlin: 1.0000
- ineqlin: [0x1 double]
- ineqnonlin: [0x1 double]
- lower: [2x1 double]
- upper: [2x1 double]

As condições de Karush-Kuhn-Tacker e o método SQP permitem compreender as condições necessárias e suficientes para a otimalidade do problema (4), não linear e com restrição, sendo uma técnica iterativa eficaz para resolver problemas de otimização contínua complexos, garantindo a identificação de soluções ótimas, quando existirem, e garantir a viabilidade e complementariedade destas soluções.

REFERÊNCIAS

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. Nonlinear programming. In: NEYMAN, J. (Ed.). *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*. Berkeley: [s.n.], 1951. p. 481–492.

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ESPAÇOS TOPOLÓGICOS E FUNÇÕES CONTÍNUAS

Gileade Trentin Detogni¹Mateus Eduardo Salomão²

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos fundamentais de uma das grandes áreas da Matemática: a Topologia. Definimos espaço topológico e abordamos algumas topologias relevantes desta teoria. Ademais, exploramos a ideia de função contínua entre espaços topológicos e analisamos algumas de suas propriedades.

Palavras-chave: Topologia, espaço topológico, continuidade.

1 Introdução

O conceito de espaço topológico surgiu com o objetivo de generalizar o estudo de conceitos como continuidade, convergência, vizinhança, dentre outros, que aparecem de forma recorrente em diversas áreas da matemática. Essa noção foi desenvolvida para abranger, como casos particulares, espaços como o espaço euclidiano, espaços métricos, espaços funcionais, entre outros.

Ao longo das primeiras décadas do século XX, diversos matemáticos contribuíram para a formulação desse conceito, entre eles Fréchet, que introduziu a ideia de espaço métrico em 1906, e Hausdorff, que propôs em 1914 uma definição de espaço topológico baseada em conjuntos abertos, já muito próxima da moderna. A definição padrão, aceita atualmente, foi consolidada na década de 1920 e tornou-se o alicerce da topologia geral.

O conceito de função contínua é um dos pilares fundamentais da matemática, presente desde os primeiros capítulos de qualquer livro de cálculo. À medida que o estudo se aprofunda, surgem formas mais gerais de continuidade, adequadas a contextos mais abstratos. Nesse sentido, a topologia geral oferece uma estrutura que permite definir e analisar continuidade de maneira abrangente, independente da estrutura específica do espaço em questão, e que engloba os diversos casos particulares, como em espaços métricos e no espaço euclidiano.

Abordaremos os conceitos de espaço topológico e continuidade neste trabalho. As referências utilizadas para o desenvolvimento deste resumo, e as quais indicamos para uma abordagem mais ampla sobre o tema são (Munkres, 2000) e (Lima, 2009).

¹ Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, gileade.2005@alunos.utfpr.edu.br;

² Professor(a) do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, mateussalomao@utfpr.edu.br

2 Topologias e Espaços Topológicos

Nesta seção, definimos os conceitos de topologia e de espaço topológico. Além disso, apresentamos algumas maneiras de construir uma topologia em um conjunto, de modo a torná-lo um espaço topológico. Também abordamos a noção de base para uma topologia.

Iniciamos definindo o conceito geral de topologia em um conjunto.

Definição 2.1. *Seja X um conjunto e τ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que τ é uma topologia de X , quando são satisfeitas as seguintes condições:*

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
2. Se $A_i \in \tau$, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$;
3. Se $A_1, \dots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Os elementos de τ são chamados de **abertos** de X , e o par ordenado (X, τ) é dito um **espaço topológico**.

Por simplicidade, quando não houver possibilidade de confusão referente a topologia de um espaço topológico (X, τ) , escreveremos apenas " X é um espaço topológico", omitindo a notação do par ordenado.

Na sequência, faremos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. *Seja X é um conjunto qualquer. Duas topologias de X , facilmente verificadas, são:*

- a) $\tau_c = \{\emptyset, X\}$, chamada **topologia trivial** ou **caótica**.
- b) $\tau_d = \mathcal{P}(X)$, formada por todos os subconjuntos de X e denominada **topologia discreta**.

Exemplo 2.2. *Considere o conjunto $\mathbb{R}^n$, onde $n \geq 1$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é interior a um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, quando existe $\varepsilon > 0$, tal que a bola aberta de centro a e raio ε está contida em U . A coleção*

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^n ; U \text{ contém apenas pontos interiores}\}$$

*é uma topologia de $\mathbb{R}^n$, chamada de **topologia usual** do espaço $\mathbb{R}^n$.*

Em geral, é difícil descrever todos os abertos de uma topologia. Porém, na maioria dos casos, é possível especificar uma coleção menor de subconjuntos e definir a topologia em termos destes. Isso nos motiva a definir o conceito de base para uma topologia.

Definição 2.2. *Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para uma topologia de X se valem:*

1. *Qualquer que seja $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;*

2. Se $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Os elementos $B \in \mathcal{B}$ são ditos **elementos básicos**.

Exemplo 2.3. Considere $n = 1$ no Exemplo 2.2. Neste caso, temos que o conjunto de todos os intervalos abertos da reta é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

Dada uma base, é possível obter uma única topologia intuitiva a partir da mesma, esta será definida abaixo.

Proposição 2.1. Se X é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia de X , então a coleção τ de todas as uniões possíveis de elementos de $\mathcal{B}$ é uma topologia de X .

Definição 2.3. A topologia τ , obtida na Proposição 2.1, é chamada de **topologia gerada** por $\mathcal{B}$.

Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos, é possível induzir uma topologia no conjunto $X \times Y$, a partir das topologias τ_X e τ_Y , como a próxima definição abaixo nos mostra.

Definição 2.4. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos. A topologia em $X \times Y$ que tem como base o conjunto

$$\mathcal{B} = \{U \times V ; U \in \tau_X \text{ e } V \in \tau_Y\}$$

é chamada **topologia produto** em $X \times Y$.

A topologia produto "se comporta bem" com relação às bases, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.1. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para as topologias de X e Y , respectivamente. Então

$$\mathcal{D} = \{B \times C ; B \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

é uma base para a topologia produto em $X \times Y$.

2.1 Funções Contínuas

Quando trabalhamos em espaços métricos, a definição de função contínua é similar à que é vista em cálculo, trocando o módulo pela métrica do espaço. Porém, num espaço topológico arbitrário, nem sempre temos uma forma de medir distâncias entre os elementos do conjunto. Ainda assim, existe uma maneira de estender o conceito de função contínua para espaços desprovidos de uma métrica.

Definição 2.5. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é uma **função contínua** se, para cada aberto V em Y , o conjunto $f^{-1}(V) := \{x \in X ; f(x) \in V\}$ é um aberto de X .

A proposição a seguir é bastante útil quando não há uma estrutura tão clara dos abertos do contradomínio de uma função, pois em geral, os elementos básicos são mais simples para se trabalhar do que os abertos propriamente ditos.

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de Y . Se $f^{-1}(B)$ é aberto em X , para todo $B \in \mathcal{B}$, então $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua.*

Há uma formulação equivalente para a definição de continuidade, mais similar à que é abordada no contexto de cálculo, que será abordada na sequência.

Definição 2.6. *Seja X um espaço topológico. Uma **vizinhança** de um elemento $a \in X$ é um aberto U de X tal que $a \in U$.*

Proposição 2.3. *Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então são equivalentes:*

- a) *A função f é contínua.*
- b) *Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subseteq V$.*

Essa definição para espaços gerais é muito simples, já que é apenas em termos de abertos, o que nos permite demonstrar teoremas clássicos envolvendo continuidade de maneira fácil. Por exemplo:

Teorema 2.2. *Sejam X , Y e Z espaços topológicos. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.*

Demonstração. De fato, se V é um aberto de Z , então $g^{-1}(V)$ é aberto em Y , pois g é contínua, e como f também é contínua, segue que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ é aberto em X . Por fim, como

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V),$$

concluimos que $g \circ f$ é contínua. □

A continuidade de uma aplicação num produto cartesiano também tem bom comportamento em relação à continuidade de suas funções coordenadas, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.3. *Sejam A , X e Y espaços topológicos e $f : A \rightarrow X \times Y$ uma aplicação dada por*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Então, f é contínua se, e somente se, as funções coordenadas $f_1 : A \rightarrow X$ e $f_2 : A \rightarrow Y$ são contínuas.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2009.

MUNKRES, J. R. *Topology*. Reino Unido: Prentice Hall, Incorporated., 2000.

ESPAÇOS VETORIAIS QUOCIENTES E O TEOREMA DO ISOMORFISMO

Vinícios Gabriel Positz Haiduk¹Mateus Eduardo Salomão²

RESUMO

Neste trabalho, será apresentado o conceito de espaço vetorial quociente, sua construção e um resultado sobre sua dimensão. Além disso, será abordado o conceito de isomorfismo entre espaços vetoriais. Como junção dos conceitos supracitados, será enunciado e demonstrado o notável Teorema do Isomorfismo no contexto de espaços vetoriais.

Palavras-chave: Espaço quociente, Isomorfismo, Teorema do Isomorfismo.

1 Introdução

Os espaços vetoriais constituem uma das estruturas fundamentais da álgebra linear. No desenvolvimento desta teoria, surge a noção de espaço quociente, uma estrutura que auxilia significativamente no estudo do espaço vetorial em questão e de objetos a ele relacionados. Este espaço é formado por classes de equivalência de uma relação que preserva parte da estrutura do espaço, e o restante é "fatorado".

As transformações lineares são objetos bastante eficazes que permitem fazer relações entre espaços vetoriais, estas são funções que preservam a adição e a multiplicação por escalar. Dentre tais transformações, destacam-se os isomorfismos. Quando existe um isomorfismo entre dois espaços vetoriais, isso implica que as propriedades de ambos são as mesmas em termo de estrutura algébrica.

Um resultado envolvendo espaços quocientes e isomorfismos, é o Teorema do Isomorfismo, que permite identificar espaços quocientes com espaços mais "familiares". Abordaremos este resultado no texto.

As referências utilizadas para o desenvolvimento deste resumo, e as quais indicamos para uma abordagem mais ampla sobre o tema são (Coelho; Lourenco, 2010), (Hoffman; Kunze, 1979) e (Lima, 2011).

Destacamos que ao longo de todo o texto, $\mathbb{K}$ representará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$).

¹ Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, vinicioshaiduk@alunos.utfpr.edu.br;

² Professor do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, mateussalomao@utfpr.edu.br.

2 Espaços Vetoriais Quocientes

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço vetorial de V . Nesta seção, construiremos um espaço vetorial chamado *espaço quociente* de V por W e apresentaremos um resultado sobre sua dimensão.

Inicialmente, consideremos uma relação $\sim$ em V , definida como segue: dados $v_1, v_2 \in V$,

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W.$$

Não é difícil mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência em V , ou seja, satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Dado $v \in V$, indicaremos por $\bar{v}$ a sua classe de equivalência, isto é, $\bar{v} = \{u \in V ; u \sim v\}$. Assim, pela definição da relação $\sim$, temos

$$\bar{v} = v + W := \{v + w ; w \in W\}.$$

Agora, é possível definir operações, de maneira bastante natural, no conjunto quociente

$$V/W := \{\bar{v} ; v \in V\},$$

de modo que este conjunto munido de tais operações seja um espaço vetorial. Com efeito, dados $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v} \in V/W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos a soma e a multiplicação por escalar em V/W como

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2} \quad \text{e} \quad \lambda \bar{v} = \overline{\lambda v}.$$

Cabe observar que o vetor nulo de V/W é $\bar{0} = W$.

Definição 2.1. O espaço vetorial V/W , construído acima, é chamado de *espaço quociente* de V por W .

A seguir, exemplificamos uma maneira de encontrar uma base para um espaço quociente.

Exemplo 2.1. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ e o subespaço $W = [(1, 1)]$ de V . Encontraremos uma base para o espaço quociente V/W . Para isso, precisamos tomar uma base de $\mathbb{R}^2$ que contém o vetor $(1, 1)$. Por exemplo, seja $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ tal base. Afirmamos que $\{\overline{(1, 0)}\}$ é base de V/W . De fato, como tal conjunto é unitário, é suficiente mostrar que B gera V/W . Seja $v \in V$, uma vez que B é base de V , existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, 0)$. Logo,

$$\bar{v} = \alpha_1 \overline{(1, 1)} + \alpha_2 \overline{(1, 0)} = \alpha_2 \overline{(1, 0)}.$$

Assim, B gera V/W .

É possível generalizar a construção feita no Exemplo 2.1, e obter o resultado enunciado na próxima proposição.

Proposição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, e W um subespaço vetorial de V . Então,*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

3 Isomorfismos e o Teorema do Isomorfismo

Nesta seção, definiremos o conceito de isomorfismo entre espaços vetoriais e apresentaremos alguns resultados sobre o tema.

Definição 3.1. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Um isomorfismo entre U e V é uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ que é bijetora. Se existir um isomorfismo $T : U \rightarrow V$, então dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos e indicamos por $U \cong V$.*

Dizer que dois espaços vetoriais são isomorfos, significa que os dois espaços e as operações podem ser diferentes, mas ambos têm a mesma estrutura. Um importante resultado para investigar se uma transformação é um isomorfismo é enunciado na sequência.

Proposição 3.1. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita, e tais que $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$. Se $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é um isomorfismo.
- (b) T é injetora.
- (c) T é sobrejetora.

Exemplo 3.1. *Seja U o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das matrizes hermitianas complexas de ordem 2, isto é, o espaço das matrizes complexas $A = (a_{ij})_{ij}$ tais que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. A transformação linear dada por*

$$T : \quad \mathbb{R}^4 \quad \rightarrow \quad U$$

$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo.

A seguir, enunciamos dois resultados sobre a dimensão de espaços vetoriais isomorfos, estes são úteis para identificá-los com mais facilidade.

Teorema 3.1. *Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

Corolário 3.1. *Todo espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão $n \geq 1$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Um resultado que é um dos pilares em diversos contextos na área de Álgebra é o Teorema do Isomorfismo. A seguir, apresentaremos uma versão deste teorema para o contexto de espaços vetoriais.

Teorema 3.2 (Teorema do Isomorfismo). *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear, então*

$$U/\text{Nuc}T \cong \text{Im}T,$$

onde $\text{Nuc}(T) := \{u \in U ; T(u) = 0\}$ e $\text{Im}(T) := \{T(u) ; u \in U\}$.

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} \varphi : U/\text{Nuc}T &\rightarrow \text{Im}T \\ \bar{u} &\mapsto T(u) \end{aligned}$$

Se $\bar{u}, \bar{v} \in U/\text{Nuc}T$, então $u - v \in \text{Nuc}T$. Assim, $T(u - v) = 0$, e por T ser linear, segue que $T(u) = T(v)$, isto é, $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$, o que mostra que φ está bem definida. Ademais, se $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\varphi(\lambda\bar{u} + \bar{v}) = \varphi(\overline{\lambda u + v}) = T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda \varphi(\bar{u}) + \varphi(\bar{v}),$$

o que mostra que φ é linear.

Afirmamos que φ é injetora. Com efeito, dado $\bar{u} \in \text{Nuc}\varphi$, temos

$$\varphi(\bar{u}) = 0 \Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow u \in \text{Nuc}T \Rightarrow \bar{u} = \bar{0}.$$

Portanto, $\text{Nuc}\varphi = \{\bar{0}\}$.

Por fim, φ é sobrejetora, pois tomando $v \in \text{Im}T$, então existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Dessa forma, $\varphi(\bar{u}) = T(u) = v$.

Desse modo, mostramos que existe um isomorfismo entre $U/\text{Nuc}T$ e $\text{Im}T$, e o resultado está provado. $\square$

REFERÊNCIAS

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear*. São Paulo: EDUSP, 2010.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

O GRUPO FUNDAMENTAL DO TORO E O SEU USO EM CÓDIGOS DE SUPERFÍCIES

Alice Carolina Silveira Zucho¹Waldir Silva Soares Junior²

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos fundamentais de Topologia algébrica. Definindo Grupo Fundamental, explorando a continuidade em grupos contínuos, especificamente no toro, avaliando sua adequação como ambiente para gerar um código de superfície.

Palavras-chave: Grupo Fundamental, Códigos de Superfície, Topologia Algébrica.

Objetivo Geral

No estudo de códigos quânticos corretores de erros existe um tipo particular de códigos chamados códigos de superfície. Para gerar um código de superfície é necessário escolher qual superfície será usada como ambiente, pois a quantidade de qubits codificados em tal código depende apenas da topologia da superfície, mais especificamente, da quantidade de geradores do seu grupo fundamental (Lidar; Brun, 2013). Por isso, para fazer essa escolha das superfícies, pode ser usada a topologia algébrica.

A topologia algébrica é um ramo da matemática que utiliza a álgebra como ponte para conhecer espaços topológicos, obtendo informações e propriedades em cima deles. Um de seus ramos é o estudo do Grupo Fundamental, cuja base está nas homotopias que nos fornecem informações sobre a natureza topológica de um determinado espaço, sendo um instrumento indispensável para compreender a continuidade em subconjuntos fechados. (Lima, 2018)

Temos uma homotopia quando dadas duas funções $f, g : X \rightarrow Y$, onde X, Y são espaços topológicos e $I = [0, 1]$, conseguimos uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Denotamos como $f \simeq g$. Assim, temos como objetivo central deste trabalho é determinar o grupo fundamental do toro.

¹Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, alicezucho@alunos.utfpr.edu.br

²Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, waldirjunior@utfpr.edu.br

Resultados

Para introduzir precisamos nos familiarizar com alguns conceitos e propriedades interessantes.

Definição. Dadas duas aplicações $a, b : I \rightarrow X$ dizemos que são *caminhos livremente homotópicos* quando existe uma aplicação contínua $H : I \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = a(s)$, $H(s, 1) = b(s)$ e $H(0, t) = H(1, t)$ para quaisquer $s, t \in I$.

Temos que a relação de homotopia livre goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Quando temos o conjunto de todos os caminhos de X que possuem as mesmas extremidades que a e que são homotópicos a a com extremos fixos durante a homotopia chamamos de classe de homotopia. Denotaremos como $\alpha = [a]$.

Proposição 1. Sejam $a, b, c : I \rightarrow X$ caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$, $\gamma = [c]$ suas classes de homotopia, $x = a(0)$ a origem de a , $y = a(1)$ seu fim, e_x, e_y os caminhos constantes sobre esses pontos e $e_x = [e_x]$, $e_y = [e_y]$ as classes de homotopia dessas constantes. Temos que:

- 1) $\alpha\alpha^{-1} = e_x$;
- 2) $\alpha^{-1}\alpha = e_y$;
- 3) $e_x\alpha = \alpha = \alpha e_y$;
- 4) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Definição. O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$, onde $x_0 \in X$, será formado por todas as classes de homotopias de caminhos fechados com base neste ponto, constituindo assim o Grupo Fundamental do espaço X com base no ponto x_0 e o elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia $e = e_{x_0}$ do caminho constante no ponto x_0 .

Proposição 2. O Grupo Fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y .

Proposição 3. O Grupo Fundamental de um grupo topológico é abeliano.

Proposição 4. O Grupo Fundamental da esfera unitária S^1 é isomorfo ao Grupo aditivo dos $\mathbb{Z}$.

Da Proposição 4 é possível tirar várias conclusões do grupo fundamental S_1 , já que $\mathbb{Z}$ são um grupo ao qual estamos bem familiarizados. A primeira observação é que $\pi : S_1$ é um grupo cíclico com um gerador, já que o grupo dos $\mathbb{Z}$ é cíclico formado por um único gerador, o 1, além disso, podemos concluir que ele também é infinito, pois ambos são isomorfos. Por fim, S_1 é abeliano, já que $\mathbb{Z}$ também é.

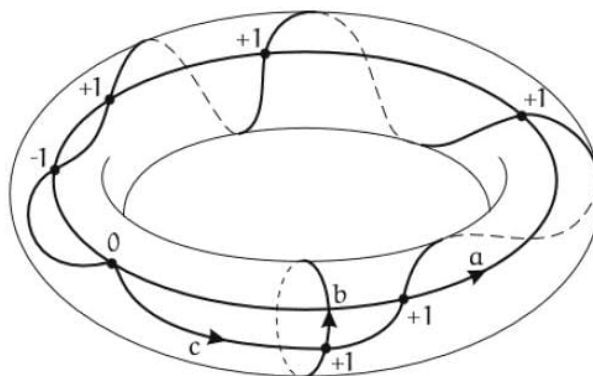
Teorema 1. Seja T o toro produto cartesiano de duas esferas unitárias: $T = S^1 \times S^1$. Temos que $\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1)$ é abeliano, livre e possui dois geradores.

Demonstração. Sabemos que $\pi_1 : S^1 \cong \mathbb{Z}$ e que o grupo fundamental do produto é o produto dos grupos fundamentais, assim

$$\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Esse grupo é abeliano, livre e tem dois geradores, então o resultado segue.

Figura 1: Toro e seus dois geradores



(Lima, 2018)

O Grupo Fundamental do Toro oferece base rica, visual e acessível, com inúmeras ferramentas, sendo um ponto de partida importante para assuntos como classificação de superfícies, espaços de recobrimento, criptografia, teoria de nós, dentre tantas outras. Além de interessante, envolvente e geometricamente charmoso por si só, são temas relevantes por exibirem a conexão entre álgebra e topologia de forma clara e visual.

Considerações Finais

A partir da Topologia Algébrica e seus vastos ramos que permitem conhecer de forma profunda inumeráveis espaços, trabalhando de forma segura e geométrica a conectividade por meio das classes de homotopia, nos pondo diante de seus exemplos clássicos, como o círculo, a esfera e o toro, nos quais sutilmente percebemos a genialidade dessas estruturas.

Além disso, ao enfatizar a relação entre homotopias e o grupo fundamental, conseguimos construir base para a compreensão de teorias mais complexas e recentes como os códigos de superfície. Pode-se notar que nesse caso a esfera não seria um bom ambiente para gerar um código de superfície pois seu grupo fundamental tem zero geradores não nulos, enquanto o toro seria um bom ambiente pois seu grupo fundamental possui dois geradores independentes, o que significa que um código gerado sobre o toro codifica dois qubits. Assim, a topologia algébrica deixa de ser apenas uma matemática abstrata e passa a ser essencial na construção de novas tecnologias atrelada a computação quântica.

REFERÊNCIAS

- LIDAR, D.; BRUN, T. *Quantum Error Correction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), 2018.

O USO DO APLICATIVO MATHCITYMAP EM ATIVIDADES REVISIONAIS DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS

Luíza Dalla Costa Perusso

RESUMO:

O objetivo desse trabalho é incentivar aos docentes do curso de Licenciatura em Matemática o uso do aplicativo MathCityMap em sala de aula para fins revisionais de conteúdos. Para isso, inicialmente é necessário compreender o manuseio do aplicativo e seus diferentes formatos de questões para se iniciar uma trilha de atividades. Sendo assim, este trabalho visará analisar a estrutura do aplicativo, bem como relacioná-la a diferentes conteúdos estudados no ensino básico, exemplificando-os com casos já trabalhados. Por fim, discutir os feedbacks dos alunos que desenvolveram as atividades por meio da trilha elaborada e como a dinâmica teve um impacto positivo no ensino desses educandos.

Palavras-chave: MathCityMap, Ludicidade, Matemática.

Objetivo Geral:

O objetivo geral desse trabalho é despertar o interesse de professores no manuseio do aplicativo MathCityMap em sala de aula. Para isso, tem-se como objetivo específico apresentar o funcionamento das diferentes tarefas e como elas podem ser utilizadas dentro dos conteúdos do currículo básico na disciplina de Matemática.

Resumo teórico:

Percebe-se que uma atual preocupação das escolas e professores é promover um ambiente de aprendizado dinâmico e interdisciplinar, no qual o aluno seja o componente ativo e principal durante seu processo de formação. Diante disso, a metodologia de resolução de problemas destaca-se nesse contexto como forma de relacionar as definições trabalhadas nos livros didáticos com as práticas pedagógicas.

Nesse sentido, em um contexto de pandemia mundial, o aplicativo MathCityMap, elaborado pelo grupo MATIS I, integrantes da Universidade de Goethe, em Frankfurt, ganhou voz na academia, com o objetivo de aproximar os estudos dos alunos, em um período em que a aula presencial já não era possível.

Esse aplicativo busca a realização de “trilhas matemáticas”, as quais são definidas como um conjunto de tarefas desenvolvidas ao ar livre. Em pequenos grupos os alunos passeiam pelo local onde a trilha foi elaborada e o aplicativo gera uma espécie de GPS para que a trilha seja seguida de forma

Docente formada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, luizaperusso@gmail.com

correta. Em cada parada há uma foto remetente a um problema que deverá ser solucionado. Sendo assim, os alunos discutem em conjunto possíveis soluções para os problemas, trabalhando em equipe, relacionando conceitos com vivências e disfrutando de um momento de aprendizado fora da sala de aula.

O projeto chegou na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Pato Branco, pela participação de docentes da instituição no curso de formação “Task Design for Math Trails”. Logo após a participação, houve a aplicação de trilhas matemáticas elaboradas por esses docentes e posterior publicação e registro de proposta como projeto de ensino.

No ano de 2024, as professoras Elida Maiara Velozo de Castro, Janecler Aparecida Amorin Colombo e Edineia Zarpelon oportunizaram a realização de um curso de formação para professores da rede municipal cidade de Pato Branco para que o projeto ganhasse vida nas escolas da cidade.

O curso foi nomeado como “Matemática ao ar live: por entre cálculos, trilhas e tecnologia” e contou com 5 encontros presenciais, para estudo e manuseio do aplicativo e página da web, bem como discussão das tarefas elaboradas pelos participantes; 6 encontros não presenciais para a confecção das tarefas nas escolas e registros na página da web; 1 encontro presencial para a aplicação da trilha nas escolas em que os professores participantes do curso atuavam.

Para usufruir do aplicativo, o primeiro passo é o docente criar uma conta na página da web, feito isso, será possível acessar a aba “tarefas” e lá será o local em que o professor desenvolverá as atividades conforme o tipo de problema e solução que ele espera dos alunos. Cabe lembrar que todas as etapas desse processo são bem explicadas, portanto o aplicativo se torna uma ferramenta prática e eficaz para ser utilizada nas escolas.

Os tipos de tarefas disponíveis na plataforma são as seguintes: intervalo – ideal para problemas de medições, cálculos de área ou volume, uma vez que é estabelecido um intervalo numérico como possível solução; valor exato – recomendado para problemas de contagem, no qual o resultado é expressado por um número natural; múltipla escolha – indicado para conceitos e classificações; preenche os espaços em branco – tipo de tarefa para se completar informações; vetor (valor exato) – utilizado quando há mais de uma pergunta para ser respondida, nas quais os valores são representados por números naturais; vetor intervalo – também envolve mais de uma pergunta, nas quais as soluções são dadas em intervalos numéricos ou valores aproximados; conjunto – para quando o problema possui mais de uma solução e a ordem das respostas não importam; fração – o resultado é dado de forma fracionária e estação de informação – envolve uma ideia informativa, de curiosidade ou de utilidade pública.

Abaixo segue as atividades desenvolvidas pela professora Luiza Dalla Costa Perusso, que esteve realizando o curso de formação para docentes na instituição UTFPR-PB. Todas essas atividades foram debatidas em grupos com outros professores, bem como com as professoras orientadoras para aprimorá-las. Algumas dessas foram selecionadas para a aplicação de uma trilha matemática no Colégio Integral, como produto final desse curso.

A atividade foi realizada com as turmas dos 6º anos, como forma de revisar os conteúdos estudados até então. Os alunos foram divididos em equipes, na qual cada uma possuía um celular com o código de acesso da trilha para iniciá-la, além disso, os materiais necessários para solucionar as

Docente formada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, luizaperusso@gmail.com

Dimensões da porta

As portas do antigo laboratório de Ciências do colégio serão pintadas. Para descobrir a quantidade de tinta necessária, foram solicitadas suas 3 dimensões para um orçamento. Utilizando uma trena, determine essas medidas, considere apenas a parte inteira.

Dimensões Comprimento Centímetros

Figura 1: Tarefa Conjunto

Jardim da Tia Luci

Tia Luci Bertol, como era conhecida e carinhosamente chamada por todos, foi uma das grandes pioneiras na área do ensino da cidade e idealizadora do desenvolvimento e crescimento do Colégio Integral. Sempre lutou pela educação em Pato Branco e foi exemplo de mulher e educadora. Trazia sempre consigo um abraço aconchegante e abraços repletos de muito amor. Em sua homenagem, os alunos, juntamente com a equipe do colégio idealizaram um jardim em frente as turmas do infantil, o qual recebeu seu nome, para que seu legado sempre floresça entre todos que aqui passarem. Para quem não sabe, Tia Luci sempre amou cuidar de flores. Sua falta será sempre sentida!

Jardim Informação

Figura 3: Estação da Informação

Pintando a quadra de vôlei

No ginásio do Colégio Integral há listras em branco que limitam a quadra de vôlei. A escola fará um orçamento para passar verniz nessa superfície e assim, será necessário determinar a área desse espaço. Desse modo, para ajudar a escola nessa tarefa, calcule o valor da área da quadra de vôlei em metros.

Área Retângulo Geometria

Figura 5: Tarefa Intervalo

Contornando o caracol

O caracol situado no Pátio do Colégio Integral é contornado por lajotas avermelhadas. Determine quantas lajotas estão ao seu redor; quantos centímetros mede a bordinha externa de cada lajota avermelhada (considere apenas o centímetro exato); qual é o perímetro total da circunferência que circunda o caracol (responda utilizando o valor da dezena exata inferior mais próxima).

Geometria Perímetro Circunferência

Figura 7: Tarefa Vetor (Valor Exato)

Vogais por consoantes

Determine a fração que representa o número de vogais pelo número de consoantes do quadrinho encontrado no segundo andar, ao lado do aparelho de registro de entrada e saída dos professores.

Fração Vogais

Figura 2: Tarefa Fração

CM por CM da rampa colorida

Determine o comprimento, a largura e o perímetro da rampa colorida do parquinho do Colégio Integral em centímetros. (Considere o comprimento como o lado maior da rampa).

Dimensões Perímetro Comprimento

Figura 4: Tarefa Vetor (Intervalo)

Painel de Exposições

Ao lado da sala da coordenação da educação infantil há um painel onde os professores costumam expor os trabalhos realizados pelos alunos. Quantas folhas inteiras de sulfite A4 é possível de serem colocadas lado a lado, verticalmente de forma a preencher o maior espaço possível? (Obs: considere a dezena exata mais próxima para as medições necessárias).

Geometria Área Retângulo

Figura 6: Tarefa Valor Exato

Contando os números

Em frente à entrada do Colégio Integral existe no chão uma trilha de números. O segundo número em verde é ** ** (primo ou composto). Os dois primeiros números em vermelho são ** ** (múltiplos ou divisores) de 10. O primeiro número primo que existe está na cor ** ** (azul ou violeta).

Figura 8: Tarefa Preenche os espaços

Em busca das retas

No centro do caracol do Integral é possível reparar que as tábuas do encosto dos bancos vermelhos estão dispostas de certa forma. Além disso, as vigas de madeira na vertical (em pé) e na horizontal (deitada sobre as tábuas verticais) que formam e dão suporte para o pergolado se encontram também em uma determinada posição. A posição relativa entre as retas formadas pelas tábuas do encosto do banco e a posição relativa entre as retas vertical e horizontal dos pilares são respectivamente:

Geometria Retas Posição

Figura 9: Tarefa escolha múltipla

Após a realização da trilha na escola, ou professores e alunos trocaram ideias, relataram a experiência, sugestões de melhorias, críticas e elogios. A opinião dos discentes se torna de extrema valia para que o docente consiga incluir as diferentes habilidades, incentivar o desenvolvimento das múltiplas inteligências e despertar a curiosidade e a busca de conhecimento por meio de dinâmicas e práticas que colocam os estudantes como centro do seu próprio aprendizado.

Por fim, alguns alunos responderam o link de formulário disponibilizado para contribuir com a

Docente formada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, luizaperusso@gmail.com

análise do uso do aplicativo em sala de aula, uma vez que foram eles os indivíduos que vivenciaram a trilha no colégio e trabalharam em quipe para resolvê-la.

Eu achei uma atividade muito divertida, pois a gente consegue aprender mais sobre os conteúdos de forma lúdica. Essas atividades são muito legais como forma de aprender mais.
O aplicativo funcionou muito bem, em minha opinião estava tudo muito bom e bem organizado.

Foi uma experiência incrível me diverti muito, e me ajudou bastante nos conteúdos q já tínhamos aprendido

Olha eu achei bem legal já que todo mundo colaborou para o bom andamento da atividade e juntou as 2 turmas né eu acho que daria pra fazermos mais um dps das férias

Eu achei incrível, foi muito divertido, foi uma maneira divertida de aprender e revisar conteúdos que já tínhamos estudado. Nunca foi a maior fã de matemática mas daquele modo foi super legal, eu me diverti muito, nós estávamos tão animados, a competitividade bateu forte, e me fez pensar como nunca, cada calculo e raciocínio que precisávamos fazer, eram simples de tão feliz que eu tava, foi incrível mesmo! Um dos melhores jeitos de revisão possível!!

Figura 10: Feedback do alunos do 6º ano do Colégio Integral

No encerramento do projeto na UTFPR-PB as percepções dos professores foram discutidas, surgindo observações pontuais quanto a escrita de enunciados, tempo de realização da trilha e quanto ao tipo de tarefa elaborada para cada conteúdo. Contudo, por ser um projeto piloto, apesar das análises realizadas, o feedback da aplicação foi muito positivo, o que torna válida a criação de uma nova trilha mais tarde.

Considerações finais:

Diante disso, nota-se a importância de mudar o ambiente de aprendizado, oportunizando novas formas de estudar e de buscar conhecimento. Destaca-se portanto, plataformas digitais como o MathCityMap, que possibilita a interdisciplinariedade, a cooperação, a liderança, a melhor capacidade de memorização e a diversão dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, com o relato dos alunos, torna-se ainda mais visível o entusiasmo para que atividades como essa se repitam no espaço escolar e se tornem uma constante no planejamento dos docentes, provando a validade do uso dessa ferramenta nas salas de aula.

REFERÊNCIAS

RODRIGUES, Jessica; OREY, Daniel; ROSA, Milton. Discutindo as Trilhas de Matemática na Percepção de Etnomodelagem. *Journal of Mathematics and Culture*. Maio, 2021. ISSN 1558-5336 . Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://journalofmathematicsandculture.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/05/article_7.pdf. Acesso em: 11/07/2025.

Os formatos de resposta para as tarefas no MathCityMap. MathCityMap. 12 de julho de 2021. Disponível em: <https://mathcitymap.eu/pt/os-formatos-de-resposta-para-as-tarefas-no-mathcitymap/>. Acesso em: 11/07/2025.

CASTRO, Elida M. V.; COLOMBO; Janecler A. A.; ZARPELON, Edineia. Interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas ao ar livre: um olhar para produções sobre essa temática. *Amazonia | Revista de Educação em Ciências e Matemática*. V. 20, n 45, 2024, p.315-328. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9946662.pdf>. Acesso em> 11/07/2025.

Docente formada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, luizaperusso@gmail.com

OPERAÇÕES INTERNAS: DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E ESTRUTURAS

Milena Bach¹Gilson Tumelero²

RESUMO

Este trabalho apresenta o conceito de operações internas, destacando sua definição formal, propriedades e exemplos em diferentes conjuntos. A partir disso, analisa como essas operações fundamentam a construção de estruturas algébricas, como semigrupos, monóides e grupos. O estudo ressalta a importância desses conceitos para o desenvolvimento do pensamento algébrico e sua relevância no ensino de matemática e em aplicações diversas.

Palavras-chave: Álgebra, Operações Internas, Estruturas Matemáticas.

RESUMO EXPANDIDO

Iniciemos este texto com a seguinte indagação: Quantas operações você conhece?

Provavelmente, ao ler esta pergunta lembrou-se da adição, subtração, multiplicação e divisão. Mas, aprofundando um pouco, talvez lembremos de operações em outros conjuntos, como adição e multiplicação de matrizes ou potenciação nos números naturais. Porém, nas matrizes, por exemplo, já iremos nos deparar com algumas restrições quanto a operar. Isto é, temos condições a serem satisfeitas para somarmos ou multiplicarmos as matrizes.

A pergunta inicial, nos leva a pensar as operações como são usadas intuitivamente no cotidiano, como, por exemplo, somar ou multiplicar números. No entanto, quando se pensa em conjuntos não tão usuais, é necessário uma compreensão mais aprofundada do conceito de operação interna. Desta forma, a pergunta inicial que deveríamos ter feito é: O que é uma operação?

Essa noção é fundamental para a construção de estruturas algébricas, tais como grupos, anéis e corpos, sendo amplamente explorada na álgebra.

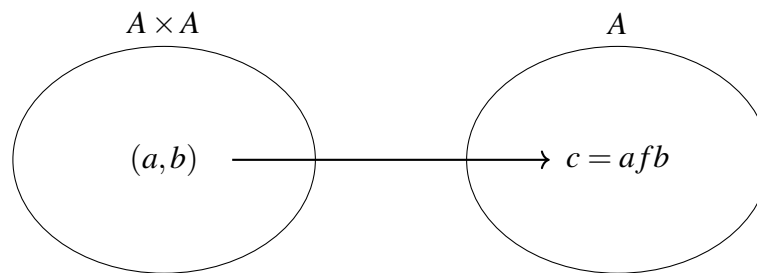
Neste trabalho, o objetivo será apresentar e analisar o conceito de operação interna a partir de uma perspectiva teórica fundamentada, abordando sua definição formal, exemplos em diferentes conjuntos, propriedades fundamentais e a formação de estruturas algébricas com base nessas operações.

Definição 1: Seja $A \neq \emptyset$. Toda função $f : A \times A \rightarrow A$ recebe o nome de **operação** sobre A ou **lei de composição interna** em A .

Em outras palavras, uma operação f em A faz corresponder a cada par ordenado (a, b) de $A \times A$ um único elemento $c = afb$ em A .

¹ Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, milenabach@alunos.utfpr.edu.br;

² Professor Doutor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, gilsont@utfpr.edu.br



Nesse caso, chama-se $c = afb$ de composto de a e b pela operação f . O composto pode ser designado por diferentes notações, como $*$ (estrela), $\circ$ (círculo), $\top$ (truc), $\perp$ (antitruc), e também os mais convencionais, como $+$, $\times$, $\cdot$, $\div$, $-$, entre outros. A seguir vamos apresentar alguns exemplos de operações internas:

Exemplo 1: Considere a função $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Esta função representa a operação de adição nos números naturais. (É fácil ver que “+”, definida anteriormente, é uma operação interna).

Exemplo 2: Considere a relação $-$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. É fácil ver que “-” assim definida, não é uma operação interna, pois, por exemplo, o par $(2, 5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mas $2 - 5 \notin \mathbb{N}$. No entanto, se extendermos a relação acima ao conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), teremos que “-” é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Ainda mais, a operação de subtração em $\mathbb{Z}$ pode ser estendida a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Exemplo 3: Considere a função f : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Esta função representa a operação de potenciação nos números naturais, pois sendo, $x, y \in \mathbb{N}$ o símbolo x^y representa ainda um número natural e portanto, f está bem definida. Observemos ainda que esta operação não pode ser estendida a $\mathbb{Z}$ pois por exemplo a imagem de $(2, -1)$ seria $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$. Também tal função não pode ser estendida a $\mathbb{Q}$ ou a $\mathbb{R}$ pois, por exemplo, a imagem de $(-1, \frac{1}{2})$ seria $(-1)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.

Além dessas, é possível definir operações internas não convencionais, como por exemplo:

Exemplo 4: Seja a relação definida como $*$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $a * b = a + a^2 b^2 + b$, onde $a, b \in \mathbb{N}$. Essa relação sempre resulta em um número natural, logo, é uma operação interna sobre $\mathbb{N}$.

Exemplo 5: A aplicação, $f : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ onde $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com elementos reais, tal que $f(A, B) = A + B$, é a operação de adição sobre $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 6: A aplicação, $g : M_m(\mathbb{R}) \times M_m(\mathbb{R}) \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ onde $M_m(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem m com elementos reais, tal que $g(A, B) = AB$, é a operação de multiplicação sobre $M_m(\mathbb{R})$.

Exemplo 7: Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ onde $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ é a classe de equivalência formada pelos números inteiros cuja divisão euclidiana por m deixa resto a . Neste conjunto definimos a soma e a multiplicação como $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$. Desta forma, temos que a adição

e a multiplicação assim definidas são operações internas sobre $\mathbb{Z}_m$. Por exemplo, se considerarmos o $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ temos as seguintes tábuas de operações:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Exemplo 8: Considere E um conjunto não vazio e $S(E)$ o conjunto de todas as bijeções de E . Munimos este conjunto da operação “ $\circ$ ”, isto é, a composição de funções. Claramente “ $\circ$ ” é uma operação interna em $S(E)$, pois a composição de funções bijetoras é ainda uma função bijetora. No caso particular de $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ escrevemos S_n para representar $S(E)$. Assim, por exemplo, $S_3 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, onde $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuja tábua de operação é dada por:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_5	f_6	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_6	f_4	f_5
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

Esses exemplos mostram que a noção de operação interna não está limitada à aritmética elementar, mas pode ser generalizada e adaptada conforme os objetivos da estruturação matemática. A análise de operações diversas é particularmente relevante na formação de estruturas algébricas, pois permite a exploração de propriedades adicionais que conferem maior ou menor complexidade à estrutura em questão.

Uma vez definida uma operação interna, esta pode ou não apresentar certas propriedades estruturais que influenciam diretamente no tipo de estrutura algébrica que o conjunto, munido desta operação poderá formar. As principais propriedades de uma operação interna são: associativa, comutativa, elemento neutro, elemento simétrico.

Por exemplo, consideremos um conjunto E não vazio, munido de uma operação $*$. Dizemos que a operação $*$ é associativa, se, para quaisquer a , b e c de E termos que $(a * b) * c = a * (b * c)$. Um exemplo usual de operação associativa é a adição em $\mathbb{R}$ pois, $(a + b) + c = a + (b + c)$ para quaisquer a , b e c em $\mathbb{R}$.

Já a propriedade comutativa ocorre quando a ordem dos elementos não interfere no resultado, ou seja, $a * b = b * a$, para quaisquer a e b em E . Como exemplo usual de operação comutativa, podemos considerar a operação multiplicação em $\mathbb{Z}$. No entanto, se considerarmos a operação de multiplicação no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ como sabemos, não é comutativa.

Agora, referindo - se ao elemento neutro, é um elemento e de E que, ao operar com qualquer outro a de E , mantém esse outro inalterado, isto é, $a * e = a$. Por exemplo, o zero na adição de números reais, pois $a + 0 = a$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Já o elemento simétrico é aquele que, ao operar com um dado elemento, produz o neutro, isto é: Seja $a \in E$, então dizemos que b é o simétrico de a em E se $a * b = b * a = e$ onde e é o elemento neutro da operação $*$. Por exemplo, multiplicação de números racionais, o elemento neutro é o 1, e o simétrico de $a \in \mathbb{Q}^*$, é o seu elemento inverso $\frac{1}{a}$, pois $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

A partir da definição e propriedades das operações sobre um conjunto E , é possível formar estruturas algébricas. Por exemplo, consideremos um conjunto não vazio E , munido de uma operação $*$. Caso a operação $*$ seja associativa em E dizemos que $(E, *)$ forma uma estrutura que chamamos de **Semigrupo**. Se ainda além de a operação $*$ ser associativa, possuir elemento neutro em E , dizemos que a estrutura $(E, *)$ é um **Monóide**. Ainda mais, se a operação $*$ for associativa, possuir elemento neutro e seja tal que para todo elemento de E , ele possua o seu simétrico em E , dizemos que $(E, *)$ forma uma estrutura de **Grupo**.

Por exemplo, $(\mathbb{N}, +)$ (considerando $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e a adição usual de números naturais) é uma estrutura de Semigrupo. Já $(\mathbb{Z}, +)$ é uma estrutura de Grupo.

Domingues e Iezzi (1939) mostra como tais estruturas são fundamentais para a álgebra e formam base para variadas aplicações em campos da matemática, da computação e da física.

Compreender o conceito de operação interna é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da estruturação lógica dos conjuntos. A definição formal e a análise de propriedades como associatividade, comutatividade e existência de elementos neutros e inversos permitem não apenas entender operações conhecidas, mas também criar novas operações e reconhecer seu papel na formação de estruturas algébricas. Os autores estudados - Filho (1980), Monteiro (1969) e Domingues e Iezzi (1939) - reforçam a importância dessa temática na base da matemática moderna. As operações internas constituem o ponto de partida para a construção de sistemas mais complexos e são essenciais na formação de futuros professores de matemática e na aplicação de conceitos algébricos em outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. São Paulo, SP: Atual, 1939.
- FILHO, E. d. A. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. [S.l.]: Nobel, 1980.
- MONTEIRO, L. J. *Elementos de Álgebra*. [S.l.]: Ao Livro Técnico S. A., 1969.

PREVISÃO DE DADOS DE TEMPERATURA USANDO TÉCNICAS ESTATÍSTICAS E DE APRENDIZADO DE MÁQUINA

Fernanda Paula Uliana¹Sheila Regina Oro²Waldir Silva Soares Junior³

RESUMO

Neste estudo, foram realizadas previsões de uma série temporal de temperatura média da cidade de Dois Vizinhos, Paraná, por meio de modelos de suavização exponencial, da metodologia Box & Jenkins e de redes neurais. Na comparação entre os modelos ajustados, o modelo de redes neurais apresentou melhor desempenho tanto no ajuste quanto na previsão da série temporal. Esses resultados sugerem que tal abordagem apresenta maior eficácia em séries temporais caracterizadas por comportamento sazonal homogêneo, quando comparada com métodos tradicionais de previsão.

Palavras-chave: Série temporal, Metodologia Box & Jenkins, Redes neurais.

INTRODUÇÃO

A análise de séries temporais de temperatura pode fornecer importantes informações sobre a região em estudo, possibilitando a realização de previsões, identificando tendências, padrões e eventos extremos, favorecendo assim o desenvolvimento de medidas de contingência, a fim de reduzir possíveis danos e perdas associados a variações de temperatura.

Segundo Teixeira, Souza e Tech (2024), compreender as variações na temperatura, através do estudo de séries temporais, em uma determinada região pode ser fundamental para embasar decisões em diversos setores da sociedade, devido aos impactos que essas variações podem causar.

De acordo com Morettin e Tolo (2006), "uma série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo", tendo como principais objetivos a investigação do mecanismo gerador da série, a realização de previsões, a descrição do seu funcionamento e a busca por periodicidade nos dados.

Dentro deste contexto, esse trabalho possui como objetivo geral a realização de previsões de dados de temperatura para um período de 12 meses, utilizando modelos da metodologia Box & Jenkins, de suavização exponencial e de redes neurais.

¹ Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, fernandauliana@alunos.utfpr.edu.br;

² Professora do Departamento de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, sheilaro@utfpr.edu.br;

³ Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, waldirjunior@professores.utfpr.edu.br.

MATERIAIS E MÉTODOS

Segundo Box et al. (2016), a metodologia Box & Jenkins consiste em ajustar os dados de uma série temporal de acordo com um modelo autorregressivo integrado de médias móveis de ordem (p,d,q) , denotado por $ARIMA(p,d,q)$.

Os modelos de suavização exponencial utilizados neste estudo foram os modelos $ETS(A,N,A)$. De acordo com Hyndman et al. (2008), a família de modelos ETS considera as componentes de erro, tendência e sazonalidade. No caso de modelos $ETS(A,N,A)$, o erro do modelo é aditivo, não há tendência e a sazonalidade é aditiva. Em modelos $ETS(A,N,A)$ são ajustados parâmetros α e γ , em que α representa a suavização do nível e γ representa a suavização da sazonalidade.

Segundo Hyndman e Athanasopoulos (2021), as redes neurais artificiais são métodos de previsão que utilizam modelos matemáticos inspirados na forma de funcionamento do cérebro. Para séries temporais, os dados históricos são usados como entradas em uma rede neural, em que é ajustado um modelo denotado por $NNAR(p,k)$ ou $NNAR(p, P, k)m$, utilizado para dados sazonais.

Os dados utilizados no presente estudo foram obtidos através da estação meteorológica localizada na cidade de Dois Vizinhos, Paraná, fornecidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). As medições correspondem ao período de 28 de março de 2007 a 1º de janeiro de 2024, possuem periodicidade mensal e referem-se a variável climatológica de temperatura média.

A execução da análise e tratamento de dados realizados neste estudo, bem como a criação de gráficos e a computação das características presentes nas séries temporais ocorreu através do software R, na versão 4.4.1.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Através da decomposição das componentes da série, notou-se que ela apresenta a componente de sazonalidade, porém, não apresenta tendência. Além disso, o teste da raiz unitária de Dickey-Fuller mostrou que a série é não estacionária.

Inicialmente, foi ajustado de um modelo $ETS(A,N,A)$, resultando nos parâmetros $\alpha = 0,87$ e $\gamma = 0,0001$. O valor de α indica que o nível da série se ajusta rapidamente aos novos dados inseridos, isto é, o modelo dá peso alto às observações mais recentes na suavização do nível. Além disso, como γ é muito próximo de zero, a sazonalidade é praticamente constante ao longo do tempo. As equações deste modelo referentes a estimação do nível, sazonalidade, e de previsões no instante t são dadas, respectivamente, por:

$$l_t = l_{t-1} + 0,87(y_t - l_{t-1} - s_{t-m}), \quad s_t = s_{t-m} + 0,0001(y_t - l_{t-1} - s_{t-m}), \quad \hat{y}_t = l_{t-1} + s_{t-m}$$

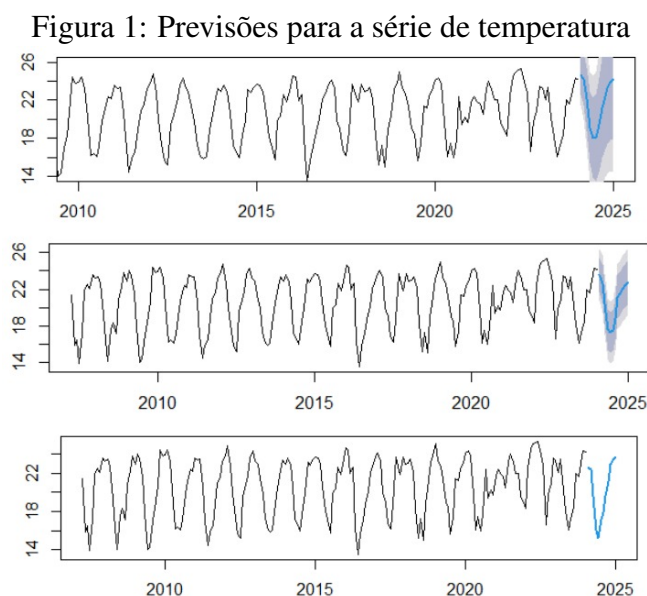
Em outro momento, realizando o ajuste de um modelo $ARIMA$, obteve-se o modelo $SARIMA(2,0,2)(2,1,1)[12]$, com coeficientes autorregressivos de 1,52 e -0,82, coeficientes médias móveis de -

1,02 e 0,43, coeficientes autorregressivos sazonais de -0,08 e -0,14, e coeficiente médias móveis sazonal de -0,8. A equação do modelo é dada por:

$$(1 - 1,52B + 0,82B^2)(1 + 0,08B^{12} + 0,14B^{24})(1 - B^{12})Z_t = (1 + 1,02B - 0,43B^2)(1 + 0,8B^{12})a_t$$

Por fim, o ajuste de um modelo de rede neural resultou no modelo NNAR(13,1,7)[12]. Este modelo utiliza como entrada da rede neural as últimas treze observações da série e uma observação passada sazonal. Além disso, a rede neural possui sete neurônios na camada oculta e período sazonal de 12 meses.

A figura 1 apresenta as previsões realizadas a partir dos modelos ETS, ARIMA e NNAR, respectivamente:



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

A partir das previsões obtidas pelos modelos das diferentes abordagens, realizou-se uma comparação com objetivo de verificar qual modelo possuiu o melhor desempenho na série. Para isso, foram considerados os valores de RMSE obtidos no ajuste e na previsão, calculado entre os dados previstos e os dados reais do período. A tabela 1 apresenta esses resultados.

Modelo	RMSE ajuste	RMSE previsão
ETS (A,N,A)	1,55	2,36
SARIMA(2,0,2)(2,1,1) [12]	1,37	2,82
NNAR(13,1,7)[12]	0,34	2,35

Tabela 1: Comparação RMSE série temperatura

Nota-se que o modelo de redes neurais foi superior no ajuste e na previsão da série, obtendo RMSE de 0,34 e de 2,35, respectivamente. De acordo com Hewamalage, Bergmeir e Bandara (2020),

os modelos de redes neurais são capazes de captar a sazonalidade em séries que seguem padrões sazonais homogêneos, sendo superiores nesse tipo de série. Através da análise comparativa é possível confirmar esse comportamento: como a série possui um padrão sazonal bem definido, o modelo de redes neurais obteve melhor ajuste e também a previsão mais próxima aos dados observados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo foram realizadas previsões para um período de 12 meses de uma série temporal de temperatura, a partir de dados coletados em uma estação meteorológica localizada na cidade de Dois Vizinhos, Paraná. Para isso, utilizou-se modelos ARIMA, modelos ETS e modelos de redes neurais (NNAR).

Utilizando como base o valor do RMSE de ajuste e de previsão de cada um dos modelos, nota-se que o modelo que apresentou melhor desempenho para a série foi o modelo NNAR(13,1,7)[12], mostrando que modelos de redes neurais apresentam forte desempenho em séries caracterizadas por padrões sazonais homogêneos.

Este estudo fornece contribuições como a identificação de que modelo possui melhor ajuste e previsão para a variável climática, possibilitando uma maior compreensão dessa variável e um melhor planejamento em ações que sofrem influência de variações de temperatura.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) pelo fornecimento da bolsa de pesquisa por meio do Programa Institucional de Iniciação Científica (PIBIC), EDITAL PROPPG 02/2024.

REFERÊNCIAS

- BOX, G. E. P. et al. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5. ed. New Jersey, EUA: Wiley, 2016.
- HEWAMALAGE, H.; BERGMEIR, C.; BANDARA, K. Recurrent neural networks for time series forecasting: Current status and future directions. *International Journal of Forecasting*, v. 37, n. 1, p. 388–427, 2020.
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. *Forecasting: principles and practice*. 3. ed. Melbourne: OTexts, 2021.
- HYNDMAN, R. J. et al. *Forecasting with Exponential Smoothing: The state space approach*. Heidelberg: Springer, 2008.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. São Paulo, SP: Blucher, 2006.
- TEIXEIRA, B. E.; SOUZA, L. G. A. de; TECH, A. R. B. Previsões de séries de temperatura na microrregião de pirassununga (sp). *RACEF - Revista de Administração, Contabilidade e Economia da Fundace*, v. 15, n. 2, p. 135–160, 2024.