Barbara Winiarski Diesel Novaes
Rodolfo Eduardo Vertuan
Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Organizadores

PROTAGONISMO, IDENTIDADE E COMPROMETIMENTO

Uma década do Curso de Licenciatura em Matemática do campus Toledo da UTFPR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MATEMÁTICA

UTFPR | Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Reitor
Everton Lozano

Diretor Geral do *Campus* Toledo
Elder Elisandro Schemberger

Diretor de Graduação do *Campus* Toledo
Ivan José Coser

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Leandro Antunes

Apoio Técnico e Operacional
Barbara Winiarski Diesel Novaes
Rodolfo Eduardo Vertuan
Suellen Ribeiro Pardo Garcia

Barbara Winiarski Diesel Novaes
Rodolfo Eduardo Vertuan
Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Organizadores

PROTAGONISMO, IDENTIDADE E COMPROMETIMENTO:

Uma década do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Toledo da UTFPR

Preparação de texto
Carlos Otávio Flexa | MC&G Editorial

Projeto gráfico
Glaucio Coelho | MC&G Editorial

Diagramação
Glaucio Coelho | MC&G Editorial

Revisão de texto
Carlos Otávio Flexa | MC&G Editorial

Capa elaborada sobre imagem cedida pela UTFPR

Esta obra foi composta com a família tipográfica Alegreya Sans e Fira Sans.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P967 Protagonismo, identidade e comprometimento : uma década do curso de licenciatura em matemática do campus Toledo da UTFPR [recurso eletrônico] / organizadores Barbara Winiarski Diesel Novaes, Rodolfo Eduardo Vertuan, Suellen Ribeiro Pardo Garcia. — 1. ed. — Toledo : UTFPR, 2025.
Dados eletrônicos (pdf)

ISBN:978-65-6115-067-5

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Professores de Matemática - Formação. 3. Prática de ensino. I. Novaes,Barbara Winiarski Diesel. II. Vertuan, Rodolfo Eduardo.III. Garcia, Suellen Ribeiro Pardo

CDD 23: 310

Bibliotecária: Priscila Pena Machado - CRB-7/6971

DOI: 10.61367/9786561150675

Campus Toledo, Rua Cristo Rei, nº 19 - Vila Becker - Toledo/PR
CEP: 85902-040 - Brasil
Tel.: +55 (45) 33796800
https://www.utfpr.edu.br/campus/toledo

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

UMA DÉCADA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CAMPUS TOLEDO DA UTFPR: PROTAGONISMO, IDENTIDADE E COMPROMETIMENTO

Rodolfo Eduardo Vertuan: rodolfovertuan@utfpr.edu.br
Suellen Ribeiro Pardo Garcia: suellenpardo@utfpr.edu.br
Barbara Winiarski Diesel Novaes: barbaraw@utfpr.edu.br

Este é um livro em comemoração a uma década do curso de Licenciatura em Matemática, do *campus* Toledo, da UTFPR. O curso teve início em 2011 e desde então passou por muitas mudanças sempre com o objetivo de tornar o aluno um profissional da educação mais humano, criativo e responsável.

Mas o que se passa em uma década de um curso tão desejado e planejado cuidadosamente por aquele pequeno grupo de professores? O livro não vai conseguir contar todas as memórias e nem os sentimentos envolvidos pelos professores e alunos em cada projeto, cada atividade, cada situação desafiadora, mas com certeza será capaz de apresentar a força desse grupo de pessoas comprometidas com a educação.

Dividido em duas partes, o livro abrange tanto a área de educação matemática quanto a matemática pura e aplicada. A primeira parte denominada de Educação Matemática apresenta capítulos que abordam projetos fundamentais para o curso, trabalhos de conclusão interessantes e reflexões sobre a formação inicial de professores. Esses capítulos destacam a importância do dinamismo do estágio curricular, a participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), a relação entre a universidade e a comunidade, a educação matemática inclusiva e o uso de jogos pedagógicos digitais, a história da matemática e a arte como recursos para promover aprendizado significativo.

Já na segunda parte do livro, denominada Matemática, os capítulos exploram pesquisas e trabalhos de conclusão de curso na área de matemática pura e aplicada. Eles abordam temas como formas indeterminadas do cálculo, equações do calor unidimensional, métodos de aproximação para o número de ouro, análise da relação entre o índice Ibovespa, o preço do petróleo e as ações da Petrobrás, aplicação de regressões lineares na estatística e estudo da álgebra ao longo dos últimos 10 anos do curso.

1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O primeiro capítulo Estágio e Residência Pedagógica: reflexos da dinamicidade na formação inicial do professor de Matemática, destaca o dinamismo do Estágio Curricular Obrigatório do curso cujas ações são resultado da reflexão dos docentes e da construção coletiva, considerando as particularidades dos estagiários e dos diferentes contextos de sala de aula.

O capítulo Experiências com o PIBID TOO Matemática: lições para uma formadora de formadores (2014-2016) destaca a participação do curso no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência desde o seu lançamento em 2012. A pesquisa revela a importância do PIBID na formação dos estudantes e docentes, questionando as práticas formativas e promovendo novas perspectivas na relação teoria-prática.

Na sequência, um texto que destaca a importância do tripé ensino-pesquisa-extensão em uma universidade, especialmente no curso de licenciatura. O capítulo Universidade e Comunidade: uma parceria essencial ressalta a relação direta entre os estágios, pesquisas e atividades de extensão realizadas pelos futuros professores nas escolas onde atuarão. Apresenta um panorama das parcerias estabelecidas ao longo de uma década de existência do curso, descrevendo ações e projetos de extensão passados, presentes e projetando futuros desafios, com o objetivo de fortalecer essas parcerias com a comunidade.

O capítulo Reelaborando Oficinas de Matemática na Perspectiva da Educação Inclusiva: materiais didáticos produzidos na impressora 3D apresenta o conceito de educação matemática inclusiva, o uso de tecnologias assistivas e exemplos de materiais desenvolvidos pelos alunos, além de destacar as considerações e desdobramentos do projeto. O texto ressalta a importância da formação inicial de professores para lidar com a sala de aula inclusiva, destacando a necessidade de conhecer os estudantes apoiados pela Educação Especial e adaptar os métodos de ensino e recursos garantindo acesso equitativo à educação matemática.

Na sequência, o capítulo Explorando a História da Matemática e a Arte como Recursos Didáticos para o Ensino de Matemática, apresenta duas propostas de atividades que surgiram a partir de trabalhos de conclusão de curso que visaram estimular a compreensão e reflexão dos estudantes por meio da História da Matemática e da Arte. Uma das propostas aborda sistemas numéricos e sua relação com a História da Matemática, enquanto a outra envolve a obra de arte *O Abraço*, de Romero Britto, explorando o teorema das quatro cores.

Também apresentando resultados de trabalhos de conclusão de curso, o capítulo A elaboração de Jogos Pedagógicos Digitais utilizando o *Game Design* como fio condutor, destaca o uso de jogos na educação como uma abordagem inovadora e eficaz para engajar os alunos e promover aprendizado significativo. Neste trabalho é abordado o *design de games* como chave para criar experiências de aprendizado envolventes. O trabalho apresenta dois exemplos de jogos desenvolvidos pelos alunos, o *Interstellar Math* para a Educação Básica e o *Clash of Math* para o Ensino Superior.

2 MATEMÁTICA

Agora, trazendo os capítulos da parte dois do livro, começamos com o texto Considerações a respeito das formas indeterminadas do cálculo para o ensino básico, que apresenta os diversos significados para a palavra "indeterminação" sob o olhar matemático. O capítulo, que traz os resultados do trabalho de conclusão de curso de um dos autores, tem como objetivo principal justificar as razões que levam tais expressões a ganharem tal nome e apresentar algumas atividades, para o Ensino Básico, para que seja possível realizar uma discussão a respeito das formas indeterminadas ainda nesse nível de ensino.

O capítulo "Equação do Calor Unidimensional: Resolução Analítica e Computacional" apresenta mais um trabalho de conclusão de curso, mas desta vez na área de matemática aplicada. Neste trabalho os autores trazem a importância do estudo da condução do calor nas ciências exatas e apresentam a resolução do problema de fluxo do calor de maneira analítica e numérica.

Outro texto apresentando a matemática aplicada é o capítulo Comparação entre os métodos de Newton-Raphson e Halley na determinação de aproximações para o número de ouro em que os autores exploram as propriedades matemáticas do número de ouro e sua presença na natureza, bem como sua aplicação na arquitetura. O capítulo discute a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, bem como exemplos de sua presença em obras arquitetônicas famosas. Também destaca a importância da proporção áurea na criação de equilíbrio e beleza na arquitetura e no design.

Na sequência, o capítulo A relação Ibovespa x Petróleo x Petrobras através de correlação e regressão linear apresenta mais uma aplicação da matemática agora em um contexto da economia. Neste trabalho, a influência do preço do petróleo e das ações da Petrobras no índice Ibovespa é investigada por meio análises de conjuntos de dados utilizando softwares computacionais e métodos estatísticos.

No próximo capítulo, intitulado "Álgebra", os autores descrevem como foram os últimos dez anos ensinando e aprendendo Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática. Com muito orgulho eles apresentam os resultados de várias produções dos alunos entre trabalhos de conclusão de curso e artigos. Refletem sobre os matemáticos famosos e os problemas que enfrentaram, desde os números inteiros até as álgebras. Mencionam teoremas clássicos, como o teorema de Pitágoras, e problemas modernos, como a criptografia. Discutem também polinômios, equações polinomiais e a contribuição de matemáticos renomados, como Galois e Emmy Noether.

No capítulo "Solubilidade e Cálculo do Grupo de Galois de Polinômios", os autores apresentam o papel fundamental que as equações desempenham na matemática, representando igualdades entre fatos, conceitos e ideias. O grau dessas equações e sua solubilidade foram objetos de estudo de Evariste Galois que introduziu a teoria de grupos e a teoria de Galois. Essas teorias marcaram a transição da álgebra como estudo de polinômios para a álgebra moderna, enfocando estruturas algébricas. O capítulo aborda a relação entre grupos solúveis e a solubilidade de equações polinomiais por radicais.

Em suma, este livro representa uma década de esforços, inovação e dedicação por parte do corpo docente e discente do curso de Licenciatura em Matemática. Ao apresentar projetos, pesquisas e trabalhos de conclusão de curso, ele destaca a importância da formação de professores comprometidos com a educação, da aplicação da matemática em diferentes contextos e da busca por soluções criativas para desafios educacionais. Certamente, essa obra serve como um testemunho da evolução do curso e como inspiração para futuros profissionais da educação, fortalecendo a comunidade acadêmica e reforçando a importância da matemática para a sociedade. Desejamos a todos uma ótima leitura!

Barbara Winiarski Diesel Novaes
Rodolfo Eduardo Vertuan
Suellen Ribeiro Pardo Garcia

CAPÍTULO 1

ESTÁGIO E RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA: REFLEXOS DA DINAMICIDADE NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Emerson Tortola: emersontortola@utfpr.edu.br
Vanessa Largo Andrade: vanessalargo@utfpr.edu.br

Este capítulo retrata a dinamicidade que defendemos para a organização e a efetivação do Estágio Curricular Obrigatório do Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR, que se operacionaliza, sobretudo, por meio de quatro disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica e/ou pela participação no Programa de Residência Pedagógica, subsidiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a partir do ano de 2018.

O termo “dinamicidade” é por nós utilizado pois as ações empreendidas são decorrentes tanto de um movimento de reflexão dos docentes (orientadores), que a cada semestre fazem modificações no planejamento com base nas experiências vivenciadas com os estagiários e residentes e em seus *feedbacks*, quanto de uma proposta de construção coletiva das atividades, que considera a idiossincrasia dos estagiários e residentes e a complexidade dos diferentes contextos de sala de aula em que eles podem vir a atuar.

Para isso, são trazidas para discussão neste capítulo algumas ações que têm sido empreendidas nesse contexto, que contemplam desde o planejamento até a efetivação da regência, seja em aulas regulares ou na forma de oficinas de matemática, e que são tomadas para reflexão sobre a prática profissional docente.

Essas ações fundamentam-se em nosso entendimento de estágio curricular, sobre o qual discorremos inicialmente, e são reflexos do "jeito" como organizamos as disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica e, atualmente, o Programa de Residência Pedagógica, o qual apresentamos na sequência. Por fim, para dar corpo à discussão, apresentamos alguns exemplos de tais ações que ilustram nossas experiências com o Estágio Curricular Obrigatório no Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR.

1 ESTÁGIO CURRICULAR OBRIGATÓRIO NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Como nos formamos professores? Embora não haja uma resposta assertiva sobre essa questão, precisamos considerar, de forma articulada, aspectos teórico-epistemológicos e didático-pedagógicos quando refletimos sobre ela e essa reflexão deve ser feita sob um olhar ao mesmo tempo crítico e cauteloso, pois o entendimento que se revela sobre tal questão orienta, de certa forma, a maneira como são organizados os estágios curriculares nos cursos de licenciatura.

Quando pensamos a respeito do estágio, precisamos, como indicam Silvestre e Valente (2014), (re)pensar a sua finalidade, (re)conhecer que as concepções que o nortearam até então ainda não superaram a divisão entre teoria e prática e, assim, provocar o estreitamento do vínculo escola e instituição formadora. Ou seja, precisamos:

> [...] construir mecanismos para que, de fato, haja integração sólida entre a instituição formadora e as escolas de ensino básico, para que os estágios curriculares se transformem em atividades, entre tantas outras realizadas no período de formação inicial. Além disso, que desencadeiem a consciência crítica dos alunos [futuros professores] no que diz respeito ao seu compromisso como profissional de educação, porque põe em movimento conhecimentos e habilidades necessárias para o exercício da docência. (SILVESTRE; VALENTE, 2014, p. 29)

De acordo com os autores, um bom professor é aquele que sabe interpretar o fenômeno educativo "[...] em suas múltiplas dimensões, e isso só lhe é possível se tiver, além de um referencial teórico, habilidades intelectuais pertinentes para elaborar caminhos de análises e sínteses que se transformem em ação pedagógica" (SILVESTRE; VALENTE, 2014, p. 28).

Cyrino (2013) defende que a formação do professor seja feita na perspectiva do conhecimento-emancipação:

> Essa preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor poderá ocorrer se disponibilizarmos contextos teóricos e conceituais imersos em diversas práticas, estimulando hábitos de conversar, investigar, questionar, refletir e relacionar teoria e prática num processo interativo (CYRINO, 2013, p. 81).

O que os autores sugerem, portanto, é que "[...] tanto a experiência prática como o conhecimento teórico-pedagógico e de cada campo específico do saber — são imprescindíveis para esse profissional compreender e atuar em sala de aula" (SILVESTRE; VALENTE, 2014, p. 28). Em outras palavras, é preciso compreender que "[...] a relação teoria/prática é importante no Estágio, entendendo que a teoria ilumina a prática e esta é ressignificada pela teoria" (LIMA, 2012, p. 42).

Também é preciso reconhecer que a compreensão sobre essa relação leva tempo, "[...] necessita da mediação do formador, da interlocução com os pares, do desenvolvimento da consciência crítica de que a prática não se dá pela prática, mas é embasada por princípios, teorias, valores e intenções (SILVESTRE; VALENTE, 2014, p. 28).

Além disso, Cyrino (2013, p. 78) nos chama a atenção para:

> [...] considerar que a formação do professor de Matemática não se inicia no momento em que ele é admitido num curso de licenciatura em Matemática, pois ele tem contato com aspectos que caracterizam a profissão docente muito antes de iniciar o curso de licenciatura, em toda a sua formação. As atividades e as características da cultura e do contexto no qual se desenvolve o conhecimento do futuro professor de Matemática são partes integrantes de seu aprendizado.

Assim, a formação do professor também não acontece somente nas disciplinas e atividades curriculares voltadas para o estágio. Entretanto, como explica Cyrino (2013), é no âmbito do estágio que os futuros professores podem analisar e refletir sobre as suas experiências, tomando-as como mediadoras da sua relação com a realidade, funcionando como um filtro na organização das ações de sala de aula.

Para Cyrino (2013, p. 85) é interessante buscarmos uma formação na qual os futuros professores possam "vivenciar, refletir e conscientizar-se de que a produção e a difusão de conhecimentos compõem um processo que envolve transformação, criatividade, criticidade, liberdade solidária e participação ativa na constituição dos saberes":

> Nos cursos de licenciatura em Matemática, o futuro professor deve ser despertado para a importância de valorizar e fortalecer as experiências culturais e sociais dos seus futuros alunos para que se possa construir uma sociedade mais ética, fraterna e solidária. Uma ética diferente daquela que tem valores como princípios [...], mas uma ética que tenha como princípio a vida, o respeito mútuo, a solidariedade e a cooperação (CYRINO, 2013, p. 86).

Alinhados a essas considerações, entendemos o estágio como um momento propício para a reflexão e ação crítica da prática pedagógica. Trata-se de um momento oportuno para que ações consideradas “diferenciais” possam ser desenvolvidas, as quais devem ser pensadas de modo a superar o paradigma de que existe uma prática de imitação de modelos, na qual o futuro professor observa, imita, reproduz ou reelabora modelos de prática já existentes.

Nesse contexto, buscamos a criatividade, a criticidade e a participação ativa e colaborativa — elementos apontados por Cyrino (2013) — como especificidades para a organização do estágio curricular do Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR, no qual os futuros professores são convidados a pensar em novas ideias e a implementá-las, a partir da pesquisa, das suas experiências pessoais com a prática educativa e das suas experiências formativas vivenciadas ao longo do curso, inclusive, sendo incentivada uma articulação com disciplinas cursadas anteriormente, tais como Laboratório de Ensino de Matemática, Tecnologias no Ensino de Matemática, Didática da Matemática, entre outras (LARGO *et al.*, 2016).

A seguir, descrevemos com mais detalhes como é feita a organização do estágio curricular no Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR.

2 O ESTÁGIO CURRICULAR OBRIGATÓRIO NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CAMPUS TOLEDO DA UTFPR: DISCIPLINAS E O PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

O Estágio Curricular Obrigatório do Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR, atualmente, se operacionaliza de duas formas, ou os futuros professores cursam quatro disciplinas, denominadas Estágio Supervisionado na Educação Básica, enumeradas de 1 a 4, ou participam do Programa de Residência Pedagógica, fomentado pela CAPES.

As disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica são ofertadas semestralmente e juntas totalizam quatrocentas horas, atendendo a carga horária mínima determinada pela Resolução CNE/CP n.º 02/2015. São disciplinas com foco na prática profissional docente, que têm como objetivo colocar os acadêmicos em contato direto com a realidade escolar, sob a supervisão de um professor com formação específica e, preferencialmente, com experiência em sala de aula. Contemplam, portanto, atividades de observação, de regência e de reflexão, cada uma com indicações específicas. O quadro 1 apresenta as ementas das disciplinas.

Quadro 1: Ementas das disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica

Estágio Supervisionado na Educação Básica 1	**Observação à docência, planejamento e desenvolvimento de uma produção textual que reflita os conhecimentos produzidos a partir da análise descritiva e reflexiva sobre a vivência.**
Estágio Supervisionado na Educação Básica 2	Regência de classe em matemática em um dos anos finais do Ensino Fundamental; ênfase para o processo de saberes disciplinares, curriculares, experienciais; planejamento, desenvolvimento e relatório crítico reflexivo da atividade de docência.
Estágio Supervisionado na Educação Básica 3	Regência de classe em matemática em uma das séries do Ensino Médio; ênfase para o processo de saberes disciplinares, curriculares, experienciais; planejamento, desenvolvimento e relatório crítico reflexivo da atividade de docência.
Estágio Supervisionado na Educação Básica 4	Docência em modalidades diferenciadas de ensino (turma ou grupo de alunos): projetos Alternativos; oficinas; Educação de Jovens e Adultos; planejamento e desenvolvimento de uma produção textual que reflita os conhecimentos produzidos a partir da análise descritiva e reflexiva sobre a vivência.

Fonte: Os autores, 2023.

O Programa de Residência Pedagógica, por sua vez, é um programa financiado pela CAPES, que busca, conforme descrição na página do programa,[1] contribuir para o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da Educação Básica nos cursos de licenciatura, tendo como objetivos:

1. Fortalecer e aprofundar a formação teórico-prática de estudantes de cursos de licenciatura;
2. Contribuir para a construção da identidade profissional docente dos licenciandos;
3. Estabelecer corresponsabilidade entre Instituições de Ensino Superior, redes de ensino e escolas na formação inicial de professores;
4. Valorizar a experiência dos professores da educação básica na preparação dos licenciandos para a sua futura atuação profissional;

1 Mais informações a respeito do Programa de Residência pedagógica podem ser obtidas por meio do link: https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica

5. Induzir a pesquisa colaborativa e a produção acadêmica com base nas experiências vivenciadas em sala de aula. (BRASIL, 2023)

O programa se encontra em sua terceira edição e para participar as Instituições de Ensino Superior (IES) concorrem a editais de chamada pública. As instituições selecionadas publicam editais de seleção para definir as escolas da Educação Básica que serão as escolas-campo, os professores que serão os preceptores e os licenciandos que serão os residentes. Cabe aos preceptores receber e acompanhar as atividades dos residentes na escola-campo, sob a coordenação dos docentes orientadores da Instituição de Ensino Superior.

O programa tem duração máxima de dezoito meses, organizados atualmente em três módulos, os quais totalizam uma carga horária de quatrocentas e quarenta horas. Por também atender a determinação da carga horária mínima pela Resolução CNE/CP n. 02/2015, as IES se comprometem, ao serem contempladas com o financiamento, a convalidar as atividades desenvolvidas no âmbito do programa na forma de cumprimento das atividades de Estágio Curricular.

A definição de preceptores, residentes e docentes orientadores é de responsabilidade das Instituições de Ensino Superior contempladas, geralmente feita por meio de seleção, respeitando-se a constituição de núcleos, atualmente formados por um docente orientador, três preceptores e quinze residentes, com a possibilidade de participação de alguns voluntários.

O Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR foi contemplado com núcleos nesses três editais, com uma participação de mais de setenta acadêmicos como residentes. Por possuírem objetivos semelhantes ou convergentes, buscamos desenvolver as atividades das disciplinas de Estágio Supervisionado e do Programa de Residência Pedagógica de forma articulada, de modo que estagiários e residentes pudessem e possam trabalhar em conjunto em prol de sua formação.

Isso só foi possível graças à seriedade com que temos conduzido as atividades das disciplinas de Estágio Supervisionado, sempre buscando uma aproximação com as escolas, que com a mesma seriedade têm viabilizado o desenvolvimento do Estágio Curricular Obrigatório e, recentemente, do Programa de Residência Pedagógica, atuando em nossa parceria para dar o devido suporte e promover uma experiência que preza pela articulação entre teoria e prática, como sugerem Lima (2012), Cyrino (2013), Silvestre e Valente (2014), entre outros autores.

O que muda em termos de exequibilidade é que no âmbito do Programa de Residência Pedagógica, por conta das parcerias estabelecidas com as escolas da Educação Básica, há a possibilidade de uma aproximação maior dos futuros professores das atividades docentes, uma vez que o acesso às escolas é facilitado. Os residentes, diferentemente dos estagiários que fazem uma ou algumas intervenções mais localizadas, frequentam a escola semanalmente, durante o período de realização do programa.

A definição dessas atividades se dá em conjunto pelos docentes (orientadores), que se reúnem no início de cada semestre e analisam o contexto que se apresenta a partir da realidade vivenciada pelos estagiários e residentes e pelo cenário histórico, político e social que se mostra na Educação Básica. Como resposta a essa realidade percebida, ou ao menos a alguns aspectos dela, algumas atividades conjuntas são planejadas e realizadas em aulas comuns, as quais vão desde discussões de textos, relatos de experiências e temáticas pertinentes ao cotidiano escolar — como oratória, indisciplina, cuidados com a saúde do professor, educação inclusiva, Novo Ensino Médio entre outras —, até a realização de observações, análise de aulas e videoaulas, elaboração de planos de aulas, regências, socializações e autoavaliações. É sobre o modo como organizamos e implementamos essas ações que nos debruçamos neste capítulo, a fim de retratar a dinamicidade envolvida e, ao nosso ver, requerida para o estágio curricular obrigatório na formação inicial de professores.

3 A DINAMICIDADE NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO *CAMPUS* TOLEDO DA UTFPR: DO PLANEJAMENTO ÀS PRÁTICAS DE ESTÁGIO

Cada semestre atendemos estudantes diferentes em circunstâncias diferentes. Considerar a realidade vivenciada nas escolas da Educação Básica, bem como as condições, questões e interesses dos nossos estudantes é uma das premissas que orienta o nosso planejamento das atividades a serem propostas nas disciplinas de Estágio e do Programa de Residência Pedagógica.

Quando as atividades do programa iniciaram, promovemos ações específicas envolvendo os alunos das escolas participantes; quando vivenciamos a pandemia, buscamos formas de viabilizar atendimento, auxílio e mesmo regências por meio de videoaulas e videoconferências; agora, com as mudanças do Ensino Médio, algumas mudanças têm sido incentivadas em toda a Educação Básica, como a inserção de novas disciplinas que têm ficado a cargo, principalmente, de professores de Matemática, como a disciplina de pensamento computacional, para a qual já dedicamos alguma atenção, inserindo uma disciplina optativa com essa temática em nossa grade curricular, promovendo um diálogo com os responsáveis pelo Novo Ensino Médio do Núcleo Regional de Educação do município de Toledo e desenvolvendo uma oficina a respeito para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal.

Entendemos que cabe ao estágio curricular obrigatório colocar o futuro professor em contato com a realidade de fato, não apenas simulando situações, mas oportunizando vivências tanto quanto possível em tal realidade. É nesse sentido que defendemos e acreditamos ser a dinamicidade uma característica necessária para a realização dos estágios curriculares obrigatórios na formação do futuro professor. Como consequência, muitas ações já foram empreendidas no contexto das disciplinas de estágio e do Programa de Residência Pedagógica, dentre elas, optamos por relatar um pouco sobre como é o processo de organização e planejamento das atividades de regência.

Entendemos o momento de regência nos estágios uma das principais, ou ainda, "como a principal atividade de formação dos futuros professores", que precisa ser planejada com cuidado, para que não se torne "um conjunto de experiências aleatórias de 'acerto' e 'erro'" (CARVALHO, 2012, p. 66). É durante a regência que nossos licenciandos recorrem a estratégias metodológicas estudadas durante a licenciatura, principalmente aquelas discutidas em disciplinas já cursadas, tais como o uso de jogos e materiais didáticos manipuláveis, de tecnologias da informação e da comunicação, da investigação matemática, da modelagem matemática, entre outras possibilidades.

Ao nosso ver, as regências precisam ser pensadas e desenvolvidas em uma perspectiva investigativa, de modo a colocar o aluno da Educação Básica para pensar e agir, proporcionando experiências de exploração, com questionamentos adequados do tipo: por que você pensa assim? Como chegou a essa conclusão? Isso vale para todos os casos? E se...? como sugere Skovsmose (2000).

Também defendemos que o estágio seja um momento para fazer com que os estagiários e residentes usem diferentes formas de organização do conteúdo, uma delas é que eles pensem em uma "organização invertida", na qual ao invés de primeiro propor as definições e depois apresentar exemplos ou situações, que explorem aspectos de tais exemplos ou situações para chegar às definições, tendo em vista uma "construção" do conhecimento com os alunos, requerendo um pensar diferente tanto dos estagiários e residentes, quanto dos alunos da Educação Básica.

Nessa perspectiva, as fórmulas não são apresentadas *a priori*, são obtidas como resultado de um processo investigativo e exploratório, a partir do qual o professor chama a atenção para elementos importantes que vão oferecer subsídios para a generalização e a formalização. Vale ressaltar que nem sempre a exploração de uma situação pontual garante a visualização desses elementos, sendo necessária a exploração de uma sequência de atividades devidamente pensadas para atingir esse objetivo. Além disso, se tais elementos não forem devidamente articulados com a teoria, essa forma de organização pode recair em um pragmatismo vazio, apenas invertendo a ordem de apresentação de tais fórmulas. É preciso investigação e exploração e, para isso, planejamento.

O planejamento, segundo Vasconcellos (2002, p. 79) é "uma mediação teórico- metodológica para a ação, que, em função de tal mediação, passa a ser consciente e intencional", ou seja, permite ao professor se programar para realizar determinadas discussões da melhor forma possível dentro das suas condições, considerando os alunos envolvidos.

O plano de aula é um instrumento que pode auxiliar e fomentar o planejamento por parte do professor. Pode ser entendido como um documento que reúne os recursos selecionados e (re)combinados pelo professor, uma descrição de seus usos e dos conhecimentos que os guiam (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018). É, portanto, um documento no qual o professor pode além de descrever como pretende fazer sua aula, determinar seus objetivos com a aula, prever ações dos alunos e propor intervenções, refletir sobre formas de ensinar o conteúdo e escolher a que melhor se adeque à realidade da sua sala de aula.

No contexto formativo, o plano de aula funciona como um documento que fundamenta e fomenta o diálogo sobre a organização das aulas, a partir do qual os docentes (orientadores) podem fazer questionamentos aos futuros professores, provocando a desestabilização de crenças em relação à prática profissional docente e, inclusive, em relação aos conceitos matemáticos, proporcionando momentos de reflexão que levam à aprendizagem do conteúdo e de novas formas de ensinar em sala de aula.

Por conta disso, prezamos pelo planejamento como ação fundamental para as regências, requerendo que os estagiários e residentes elaborem planos de aula bem detalhados com antecedência, a partir dos quais são promovidas discussões e reflexões, visando a uma melhor preparação para a regência.

Costumamos propor que as regências sejam desenvolvidas em dois momentos e formatos: nas aulas regulares, aproximando os futuros professores da prática docente rotineira; e na forma de oficinas, buscando trazer os alunos da Educação Básica para a Universidade, realizando atividades mais práticas, que visam o estudo da Matemática de forma lúdica e divertida, mas sem perder de vista o seu ensino.

Para as regências em aulas regulares, cada estagiário define juntamente com o supervisor da escola, os conteúdos a serem desenvolvidos. A partir disso, ou em simultâneo, realizam observações nas turmas, elaboram relatórios e discutem sobre suas experiências com seus docentes (orientadores) na universidade. Orientamos para que as regências contemplem desde a introdução e desenvolvimento de um conteúdo, com a proposição e resolução de exercícios e atividades, até a avaliação da aprendizagem dos alunos. Isso deve ser descrito no plano de aula.

Temos observado que os estagiários e residentes, quando na elaboração dos planos de aula, têm focado na descrição dos procedimentos metodológicos em detrimento da abordagem do conteúdo matemático, diante disso, começamos a propor a realização de seminários sobre os conteúdos matemáticos, temas das regências, antes mesmo de começarem a elaboração dos planos, de modo que percebam a relevância tanto de saber o conteúdo matemático, quanto a forma de ensiná-lo.

Combinada a esses seminários, temos solicitado a simulação de aulas, a partir do que descreveram em seus planos, momento em que podem colocar em ação o que foi planejado, recebendo sugestões de melhorias de seus pares e docentes (orientadores), podendo reavaliar suas ações e, se necessário, o seu planejamento de aula.

Para as regências no formato de oficinas, aulas de matemática são elaboradas e desenvolvidas com temáticas não focadas no conteúdo, mas prezando pela criatividade, ludicidade, interdisciplinaridade e protagonismo dos alunos da Educação Básica. Isso não quer dizer que o conteúdo matemático não seja abordado, pelo contrário, ele deve ser explorado nesse contexto, com o rigor necessário. Atividades dessa natureza são sugeridas em documentos e orientações curriculares como Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), Diretrizes Curriculares Nacionais (2013), Base Nacional Comum Curricular (2016), Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008) e Referencial Curricular do Estado do Paraná (2018; 2021), embora não sejam dadas orientações específicas de como implementá-las. As oficinas têm se mostrado como uma possibilidade.

Nas oficinas, os alunos da Educação Básica, por um lado, são motivados a conhecer a matemática sob uma perspectiva diferente, confeccionando e manipulando materiais (LORENZATO, 2012), realizando investigações e experimentos, dialogando com os colegas, trabalhando em grupo de forma colaborativa e sendo corresponsáveis por sua aprendizagem. Por outro lado, é uma oportunidade para os estagiários e residentes experienciarem práticas diferentes de sala de aula, considerando outras estratégias metodológicas que não a tradicional aula expositiva.

As oficinas são geralmente promovidas aos sábados, nas dependências do *campus* Toledo da UTFPR e, para a participação, os alunos das escolas de Toledo e da região realizam inscrição. Entretanto, já tivemos ocasiões delas serem realizadas em escolas mobilizando a participação de todos os alunos. Geralmente os estagiários e residentes, em grupos, desenvolvem a mesma oficina duas vezes e na sequência, com duração de aproximadamente um hora e trinta minutos cada, com um intervalo entre elas e seguidas por uma gincana de aproximadamente trinta minutos, como forma de avaliação. Na gincana são desenvolvidas atividades divertidas e interessantes e que permitam os alunos da Educação Básica, que participaram das oficinas, retomarem alguns conceitos abordados.

As oficinas são acompanhadas por docentes e egressos do Curso de Licenciatura em Matemática e, em algumas ocasiões, por professores da Educação Básica, que ao final de cada oficina entregam uma avaliação e, muitas vezes, já fornecem aos estagiários e residentes um *feedback* sobre seu desempenho, sendo útil, inclusive, para a regência no segundo horário de desenvolvimento da oficina.

Assim como para as regências em aulas regulares, os estagiários e residentes também elaboram um plano de aula para as oficinas, direcionando-as para os níveis de escolaridade cujas atividades de seu estágio curricular estão sendo realizadas naquele semestre. Além desse planejamento, solicitamos que eles desenvolvam a oficina com os colegas, as quais costumamos chamar de prévias. Na ocasião, todos os estagiários e residentes participam e ao mesmo tempo avaliam os colegas, mas sobretudo no sentido de oferecer sugestões de melhorias, tanto para a ideia da oficina quanto para a sua execução. Com base nessas sugestões os planos são revistos e reelaborados.

As oficinas ocorrem desde o segundo semestre de 2015 e já contemplaram diferentes temáticas, geralmente inspiradas em célebres problemas, como os de Malba Tahan; construção ou manipulação de materiais como o cubo mágico, teodolito e pipas tetraédricas; uso de recursos educacionais como o software GeoGebra e outros aplicativos de celulares; experimentos com alimentos, como a confecção de bolos e o trabalho com chocolates; atividades de modelagem matemática, na qual investigaram problemas baseados em informações reais, entre muitas outras. Além das tradicionais oficinas para os alunos da Educação Básica, também já foram ofertadas oficinas para os pais, alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática e para professores.

Com a pandemia de covid-19 que afetou a dinâmica escolar em todo o mundo, tanto as regências em aulas regulares, quanto as regências no formato de oficinas tiveram que ser repensadas. Não houve a possibilidade de realizá-las presencialmente, dessa forma, precisamos nos adaptar ao contexto em que as aulas das escolas foram realizadas. A forma como encontramos foi realizar as regências de forma remota, por meio de aulas síncronas e assíncronas.

As aulas síncronas foram realizadas por meio de videoconferências com a participação dos alunos em tempo real. Em um primeiro momento o acesso às escolas se deu graças ao Programa de Residência Pedagógica, o que permitiu que tanto estagiários quanto residentes acompanhassem aulas realizadas pela plataforma *Google Meet*, tivessem acesso à comunicação do professor com seus alunos, por meio da plataforma *Google Classroom*, e ministrassem aulas com a supervisão dos professores das escolas.

Já as aulas assíncronas aconteceram por meio da gravação de videoaulas, que foram disponibilizadas no Canal do Centro Acadêmico na plataforma *YouTube*[2] e divulgadas para os alunos da Educação Básica.

Essas formas de trabalho levaram os estagiários e residentes a buscarem um pouco mais sobre o universo da Educação à Distância, ainda que as ações tomadas tenham um caráter paliativo. Aos estagiários e residentes foram oferecidos cursos sobre gravação e edição de vídeos, foram promovidas discussões sobre como organizar uma videoaula e propostas análises de videoaulas disponíveis na *internet*.

Alguns estagiários e residentes até construíram suportes para os seus celulares para a gravação das suas videoaulas. Alguns preferiram gravar vídeos a partir de seus registros escritos em folhas de papel, outros em elaborar slides e fazer anotações com o auxílio do mouse ou de mesa digitalizadora.

As aulas foram elaboradas com muito cuidado nesse contexto, todo o processo de planejamento foi semelhante, porém, sempre destacamos que o enfoque dos planos de aula seria vislumbrar aulas dinâmicas. No caso das aulas síncronas, fazendo slides com designs criativos, com as informações sendo apresentadas a partir do uso de recursos como cores, imagens, efeitos sonoros e animações, vislumbrando envolver e manter a atenção dos alunos, buscando sempre a interação, fazendo questionamentos e instigando a participação deles a todo instante. Recursos como *quizzes*, jogos e aplicativos foram muito utilizados, dentre eles, *Wordwall*, *Kahoot!*, *Mentimeter*, *Google Maps*, *Jamboard*, *Math Learning Center* e Racha Cuca.

Já nas aulas assíncronas, todo um trabalho de edição foi desenvolvido o que possibilitou aos residentes e estagiários retomarem suas falas nas

2 Disponível em: https://www.youtube.com/@calmcentroacademicodamatem3671/videos.

videoaulas, muitas vezes regravando trechos confusos ou com erros, conforme observados por eles ou indicados pelos colegas e docentes (orientadores), permitindo que eles, antes da publicação, revisassem as videoaulas.

Apesar de todas as dificuldades enfrentadas, boas lições foram aprendidas, como a importância de pensar cautelosamente na organização dos conteúdos e na melhor forma de apresentá-los, de buscar a interação e participação dos alunos por meio de questionamentos apropriados e, além disso, de ampliar a participação dos alunos em atividade da universidade, como mostrou a participação dos mais de quinhentos alunos nas oficinas remotas de 2021.

Agora, com as mudanças para o Novo Ensino Médio e a inserção de novas unidades curriculares e das trilhas de aprendizagem, como Pensamento Computacional, Educação Financeira, Empreendedorismo, Robótica e Programação, novas possibilidades de atuação surgem para o (futuro) professor de Matemática que tem o desafio de ministrá-las sem uma formação específica. Pensando nisso, novas disciplinas foram inseridas na grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de contemplar essas temáticas.

Com base nas experiências de alguns de nossos residentes e estagiários que atuam nessas disciplinas através do Processo Seletivo Simplificado (PSS) da rede estadual de ensino, nos propomos a planejar e ofertar, no primeiro semestre de 2023, uma oficina a respeito de uma dessas temáticas. O tema escolhido foi pensamento computacional, por conta de uma demanda apresentada pelos professores dos anos iniciais da rede municipal de educação, uma vez que a Secretaria de Educação do município de Toledo também inseriu o pensamento computacional em seu currículo.

Dessa forma, foi planejada e ofertada uma oficina para professores dos anos iniciais para tratar de conceitos sobre o pensamento computacional, incluindo atividades desplugadas e plugadas. Essa oficina, portanto, teve como objetivo desenvolver com eles algumas atividades e provocar reflexões a respeito de como auxiliar o desenvolvimento do pensamento computacional nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base em nossas experiências, observamos a importância de investir em uma boa preparação dos estagiários e residentes para as regências. Isso tem se dado no Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Toledo da UTFPR por meio de um planejamento detalhado, no qual requeremos a elaboração de planos de aula, com a realização de reuniões para discussão e a reflexão sobre a organização do conteúdo e a melhor forma de ensiná-lo, com a simulação de aulas para os pares.

Nesse contexto, buscamos romper com o paradigma do exercício, instigando o planejamento e desenvolvimento de aulas mais investigativas, diferentes das aulas habituais, convidando estagiários e residentes a refletirem sobre como a organização do conteúdo pode influenciar na aprendizagem. Discussões matemáticas por meio de seminários têm sido utilizadas como estratégia para a compreensão do que vão ensinar e para melhor se prepararem.

As oficinas têm se mostrado uma ótima ferramenta para proporcionar esse olhar diferenciado para a Matemática, mostrando que seu ensino pode envolver criatividade, ludicidade, interdisciplinaridade e incentivar o diálogo e o envolvimento dos alunos, diferentemente das aulas habituais, cuja exposição centralizada no professor coloca exclusivamente sobre ele a responsabilidade pela aprendizagem dos alunos. Com as oficinas, os alunos tornam-se corresponsáveis junto ao professor, assumindo um papel de protagonismo nas atividades.

A adaptabilidade aos diferentes cenários e contextos também tem sido um aspecto que nos chama atenção. Durante a pandemia, consultamos as escolas para saber como as aulas estavam ocorrendo e buscamos formas de poder participar, pensando em alternativas que serviriam, de fato, para a efetivação dos estágios. Aulas síncronas e assíncronas foram planejadas e desenvolvidas, por meio de reuniões via *Google Meet*, com a devida autorização das escolas e da Secretaria de Estado da Educação do Paraná e por meio das videoaulas que foram pensadas com muito cuidado e carinho para serem disponibilizadas e divulgadas para os alunos da Educação Básica. Os alunos aprenderam técnicas de edição de vídeos e buscaram se informar como deveriam ser essas videoaulas para serem chamativas, envolventes, informativas e educativas.

Hoje, o desafio que temos enfrentado é a mudança para o Novo Ensino Médio, com a inserção de novas unidades curriculares e das trilhas de aprendizagem e a reorganização da carga horária. Unidades curriculares como Pensamento Computacional e Educação Financeira, e trilhas de aprendizagem como Empreendedorismo, Robótica e Programação, se mostram como novas possibilidades de atuação para o (futuro) professor de Matemática. Essa inserção tem provocado mudanças inclusive na grade curricular dos cursos de licenciatura, além de se constituir um tema pertinente para discussão e reflexão no âmbito da formação de professores para e da Educação Básica.

A dinamicidade que tratamos neste capítulo refere-se à nossa preocupação e seriedade em tratar o estágio curricular obrigatório como uma componente que coloca os estagiários e residentes em contato com a realidade da sala de aula, com atividades que os aproximam de sua prática profissional. Esse compromisso que assumimos se reflete na formação inicial dos professores, atribuindo a ela um caráter de flexibilidade em lidar e se adaptar a esses novos contextos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). **Programa de Residência Pedagógica**. [*S.l.*: *s.d.*], 2018. Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao- basica/programa-residencia-pedagogica. Acesso em: 31 maio 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Versão final. Brasília, 2016.

CARVALHO, A. N. P. **Os Estágios nos Cursos de Licenciatura.** São Paulo: Cengage Learning, 2012.

CYRINO, M. C. C. T. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (orgs.). **A formação do professor que ensina Matemática**: perspectivas e pesquisas. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

LARGO, V.; FREITAS, C. R.; MERLI, R. F.; VERTUAN, R. E. "Eu Acredito no Estágio!" Superando Paradigmas e Construindo um "Jeito de Fazer". *In*: QUINELATO, A. L. *et al*. **UTFPR Toledo 10 anos**: crescimento em pesquisa, ensino e extensão. Toledo: DRHS, 2016. p. 362-376.

LIMA, M. do S. L. **Estágio e Aprendizagem da Profissão Docente.** Brasília: Liber Livro, 2012. 172 p.

LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de**

Professores. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. SEED: Curitiba, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do Paraná:** princípios, direitos e orientações. Curitiba: SEED, 2018.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial curricular para o Ensino Médio do Paraná.** Curitiba: SEED, 2021.

SILVESTRE, M. A.; VALENTE, W. R. **Professores em Residência Pedagógica:** estágio para ensinar matemática. Petrópolis: Vozes, 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 12, n. 14, p. 66- 91, 2000.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. Documentational approach to didactics. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. New York: Springer, 2018.

VASCONCELLOS, C. S. **Planejamento**: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político-pedagógico. 10. ed. São Paulo: Libertad, 2002.

CAPÍTULO 2

EXPERIÊNCIAS COM O *PIBID TOO*[1] *MATEMÁTICA*: LIÇÕES PARA UMA FORMADORA DE FORMADORES (2014 – 2016)

Barbara Winiarski Diesel Novaes: barbaraw@utfpr.edu.br

Minha entrada no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Toledo (UTFPR-TD) ocorreu no dia 08 de novembro de 2012 e o concurso era para ministrar disciplinas relacionadas a Educação Matemática. O semestre iniciou com quatro meses de atraso em função da greve histórica de 2012 que teve a adesão de 95 % das instituições federais[2] e que reivindicava melhores condições de trabalho, infraestrutura e mudanças no plano de carreira.

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) foi muito significativo para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-TD pois o projeto começou exatamente um ano após o início das atividades e, talvez seja por isso que "pensar na construção de uma identidade do PIBID

1 PIBID Too é a denominação que o subprojeto recebeu do primeiro grupo de bolsistas, em alusão ao fato que, em muitas situações, a cidade de Toledo-PR é abreviada pelas letras "TOO" (VERTUAN; NOVAES; MERLI, 2016, p. 338)

2 Cf.: VEJA, s.d. Disponível em: https://veja.abril.com.br/educacao/greve-de-professores-atinge-95-das-instituicoes-federais. Acesso em: 07 jun. 2023.

confunde-se, em alguma medida e, felizmente, com a construção da identidade do próprio curso de licenciatura" (VERTUAN; NOVAES; MERLI, 2016, p. 338).

O Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-TD participa do PIBID desde o primeiro edital lançado pelo Governo Federal em 2012. Mas, afinal o que é o PIBID? Uma iniciativa por meio da "Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação e tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria de qualidade da educação básica pública brasileira" (BRASIL, 2013).[3] O programa é coordenado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e envolve a parceria entre universidades e escolas públicas.

O professor Rodolfo Eduardo Vertuan foi o primeiro coordenador e atuou no programa entre 2012 e 2013. No início eram doze pibidianos, um coordenador (universidade), dois supervisores de duas escolas parceiras. Muito das marcas e jeitos de fazer ressoam dessa primeira fase do PIBID Too.

Minha história com o PIBID começa em 2014. Havia acabado de retornar da licença maternidade da minha primeira filha no dia 18 de março (dia do meu aniversário) e no dia 28 de março participei da primeira reunião do grupo, como voluntária. Nessa altura o número de vagas para o projeto havia dobrado e o Professor Renato Francisco Merli assumia a segunda vaga na coordenação. Logo na sequência, o Professor Rodolfo foi convidado para ser coordenador regional da área de matemática do PIBID da UTFPR e isso abriu espaço para que eu assumisse uma das vagas na coordenação do PIBID Too. Essa experiência ocorreu até meados de 2016 e muito do que sou hoje como pessoa, como formadora, pesquisadora se deve ao coletivo do PIBID Too.[4]

Em 2013, a Capes propôs uma avaliação externa do PIBID por meio de projeto firmado entre o MEC e a Unesco. Foram convidadas duas especialistas em formação de docentes: a Professora Doutora Bernardete A. Gatti e a Professora Doutora Marli E. D. A. André que definiram uma metodologia de trabalho que alcançasse cerca de 38.000 participantes de um total de 45.000 bolsistas. Dentre as questões abertas estava "Como você avalia o PIBID para

3 Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid/pibid. Acesso em: 07 jun. 2023.

4 Nos anos de 2017 e 2018 assumem a coordenação os professores Emerson Tortola e Vanessa Largo. Na sequência assumem o projeto dos professores Ivan Coser, Loreci Zanardini e novamente o professor Renato Francisco Merli até 2019. O *campus* Toledo ficou sem PIBID nos anos 2020-2021 por motivo de cortes orçamentários do governo federal. Felizmente em 2022, fomos contemplados e o Professor Rodolfo está a frente do projeto novamente

sua formação profissional e a formação dos estudantes? Justifique sua resposta". Dentre os coordenadores de área, as respostas mais significativas foram:

- Favorece sua aproximação da realidade e das necessidades da escola básica, propiciando novas visões sobre o ensino e a prática docente.
- Contribui com a formação continuada dos docentes das IES, com sua atualização nos aspectos pedagógicos das disciplinas e nas tecnologias, criando, com a aproximação do contexto escolar, o estímulo à busca de soluções para o ensino e para atendimento às ocorrências escolares.
- Contribui para a modificação de posturas dos docentes do curso de licenciatura: maior interesse, participação e novas perspectivas sobre a relação teoria-prática.
- Ajuda a questionar construtivamente a qualidade das práticas formativas no âmbito da docência na própria IES.
- Favorece o desenvolvimento de novas compreensões sobre educação, escola e práticas educativas pela aproximação de professores e Licenciandos com a escola, considerando os efeitos positivos que colhem (GATTI; ANDRÉ; GIMENES; FERRAGUT, 2014, p. 105.

Os aspectos revelados na pesquisa demonstram a importância que é o PIBID para todos os envolvidos no processo, inclusive os coordenadores de área. A ideia do capítulo é apresentar um panorama das atividades e ações desenvolvidas no PIBID Too entre os anos de 2014 e 2016 e as lições apreendidas por uma formadora de formadores a partir desta experiência.

1 O *MODUS OPERANDI* DO PIBID TOO

Nos anos de 2014 a 2016 estávamos com vinte e quatro pibidianos, dois coordenadores, um coordenador regional e quatro supervisores das escolas (figura 1). Era uma situação privilegiada pois havia uma experiência acumulada pelo Professor Rodolfo que continuava participando das reuniões nas semanas que não tinha compromissos da coordenação regional junto a reitoria.

Figura 1: Primeira reunião com a nova equipe do PIBID 2014

Fonte: *TOO NO PIBID*, 2014.[5]

O tempo que os acadêmicos deveriam disponibilizar ao projeto era de pelo menos doze horas semanais: quatro horas para uma reunião semanal, quatro horas para desenvolver atividades nas escolas e quatro horas para se dedicarem as atividades das "pastas" (gincana, produção de vídeos, comunicação, teatro, etc.) em que cada PIBIDiano poderia escolher participar de até duas pastas.

Os critérios para escolha das escolas públicas eram definidos pelo edital do governo federal em função do Índice de desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Deveriam ser escolhidas duas escolas com IDEB alto e duas escolas com IDEB baixo. Cada supervisor ficou responsável por supervisionar seis pibidianos em sua escola. Também tivemos neste período coordenadores e estudantes voluntários.

Todos os envolvidos participavam das reuniões semanais as quintas-feiras pela manhã. Duas horas de reunião era com a presença dos supervisores e mais duas horas de orientações e preparação de atividades a serem desenvolvidas nas escolas. No início das reuniões sempre havia uma atividade cultural, como por exemplo: declamação de poema, apresentação de músicas, encenação com o objetivo que aumentar a sinergia do grupo,

5 Disponível em: https://pibidmathtoo.wixsite.com/pibidmatematicautfpr. Acesso em: 16 jun 2023.

mas também pensar na formação integral de toda a equipe — aumento do capital cultural. Nesse aspecto, em algumas reuniões ocorreram dinâmicas de grupo com algum fundo moral. Os temas a serem discutidos emergiam do próprio contexto das escolas, como por exemplo educação inclusiva, relações entre a matemática – arte, música e dança e criatividade. Nessas reuniões, os quatro professores supervisores eram incumbidos de organizar e aplicar quatro oficinas ao longo do ano participando ativamente da formação inicial dos acadêmicos.

Nas escolas foram desenvolvidas as mais variadas atividades entre elas: Projeto altas habilidades – História da Matemática e as Investigações Matemáticas; Gincana de Equações do Primeiro Grau; Interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia por meio do uso de Escalas – investigações na Internet e uso do *Google Maps*; Jogos para ensinar as quatro operações: Teia das Frações; Bingo de Sistemas de Equações; Trilha do Resto; Trilha das Equações em que os alunos conseguiram avançar no cálculo mental; Atividades diferenciadas e com o uso de materiais manipuláveis; Atividades matemáticas em alusão ao Dia da Consciência Negra; GINCAMARACA: gincana interna de matemática no Colégio, com jogos abordando temas como polígonos, relações métricas, quatro operações; Oficina razão e proporção – "Arquitetos"; Oficina Funções no Geogebra; Oficina com Banco Imobiliário – sistema monetário; OBEMEP; Atendimentos individualizados intercalado com os acompanhamentos semanais nas turmas nas escolas. Essa dupla tutoria (coordenador e supervisor) permite diminuir a distância entre a teoria e a prática, pois os pibidianos têm dois orientadores:

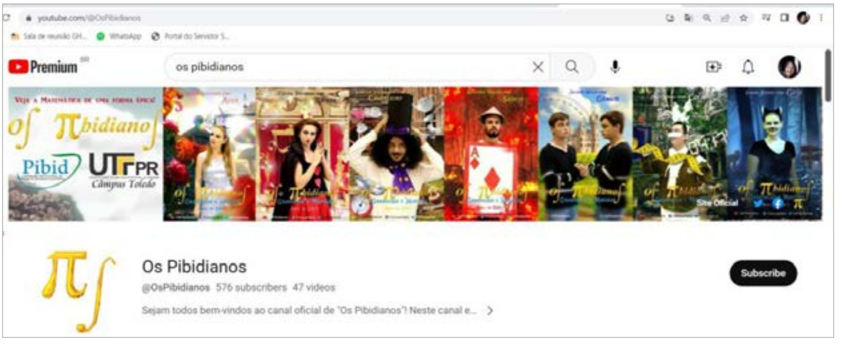
> [...] um mais prático, o da escola, e um mais teórico, o da universidade. E, dessa forma, ele tanto pode levar conhecimentos acadêmicos recentes para a sala de aula como trazer vivências e aprendizagens desse ambiente para discutir com o seu orientador na faculdade, o que, por outro lado, permite que esses professores universitários tenham mais contato com a realidade das escolas (ANDRE, 2015, p. 71).

Os pibidianos ajudaram a organizar vários eventos, entre eles a III Semana da Matemática do *campus* de Toledo da UTFPR e oficinas no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM UTFPR-TD) sobre Razão, Proporção e Frações.

Outro aspecto que foi bastante valorizado foi o incentivo a publicação de comunicações científicas principalmente: III Semana da Matemática da UTFPR – *campus* Toledo; no II Encontro PIBID da UTFPR e no XIII Encontro Paranaense de Educação Matemática. No período de férias os pibidianos elaboraram guias para as videoaulas e atividades desenvolvidas em 2014 além de ler e apresentar aos demais bolsistas do grupo um livro de ficção, romance, aventura etc. de seu próprio interesse.

A produção de vídeos[6] foi uma constante durante o desenvolvimento do projeto, tanto para divulgação de outras ações quanto para produção de vídeos didáticos. Podemos destacar os vídeos de divulgação do “Calmat – Projeto de Matemática de Altas Habilidades do Colégio Estadual Luiz Moraes Rego”, Vídeos das pré-gincanas nos Colégios Parceiros, chamada para a II Gincamat, Vídeos do projeto Conscientizar (ligados à II Gincana da Matemática) e um vídeo comemorativo do Colégio João Cândido. Em relação aos vídeos didáticos, um grupo de pibidianos criou um Canal no *Youtube*, “Os pibidianos” em que desenvolveram videoaulas divertidas sobre conteúdos da Educação Básica que exploraram temas de filmes como as crônicas de Nárnia, Caverna do Dragão, Alice no País das Maravilhas e Mário Brothers, entre outros (figura 2).

Figura 2: Capa do Canal do *YouTube* “Os Pibidianos”



Fonte: Os pibidianos, s.d.[7]

Ao final do ano, todos os bolsistas respondiam a uma avaliação anual do PIBID como intuito de rever pontos falhos e aprimorar o que já estava dando certo.

A comunicação era considerada um aspecto crucial para o bom andamento do projeto. Na altura utilizávamos muito o Facebook por meio de dois grupos abertos “Too no PIBID” e “PIBID Matemática UTFPR” e quatro grupos fechados “PIBID Retrô”, “Gincana da Matemática”, “PIBID Vídeos”

6 Cf.: Os pibidianos, s.d. Disponível em: https://www.youtube.com/@OsPibidianos. Acesso em: 07 jun. 2023.

7 Disponível em: https://www.youtube.com/@OsPibidianos. Acesso em: 07 jun 2023.

e "Teatro". Os grupos fechados estavam relacionados com algumas das quatro horas de atividades das pastas e comunicação geral do grupo. Os primeiros pibidianos que entraram em 2012 desenvolveram o sítio virtual "Too no PIBID",[8] para divulgação das ações do projeto que posteriormente foi incrementado e alimentado por quem ia chegando. No site também está hospedado o "Boletim Informativo", escrito pelos próprios pibidianos e que versavam sobre temas relacionados a matemática, ensino de matemática e atividades desenvolvidas.

A pasta "teatro" estava a cargo do Professor Rodolfo Eduardo Vertuan. No período de um ano pibidianos fizerem uma oficina teatral com apoio da Secretaria de Cultura de Toledo no ano de 2015. A preparação também envolveu a leitura e discussão de textos sobre o teatro como elemento para a formação de professores que ensinam matemática (com todo o grupo) e a elaboração de uma peça teatral. O título da peça criada foi "A Fada dos Números", inspirado na obra "O Diabo dos Números" de Hans Magnus Enzensberger. A peça foi apresentada na UTFPR e nas escolas parceiras do projeto (figura 3).

Figura 3: Apresentação da peça "A Fada dos Números" em uma das escolas parceiras

Fonte: TOO NO PIBID, s.d.[9]

8 Disponível em: http://PIBIDmathtoo.wix.com/PIBIDmatematicautfpr. Acesso em: 07 jun 2023.

9 Disponível em: https://pibidmathtoo.wixsite.com/pibidmatematicautfpr. Acesso em: 07 jun 2023.

Durante o período que estive na coordenação do PIBID (2014-2016) juntamente com o Professores Renato Francisco Merli e Rodolfo Eduardo Vertuan foram organizadas duas gincanas na UTFPR-TD com as quatro escolas parceiras. O PIBID estava encarregado de realizar todo o planejamento, desde o regulamento[10] até a realização das provas no dia do evento, mas o evento contou com a ajuda de uma grande parte dos professores do curso de Licenciatura em Matemática e acadêmicos. Foram realizadas pré-gincanas nos colégios com o objetivo de esclarecer dúvidas sobre as provas e o regulamento.

Os pibidianos tiveram que usar muito de sua criatividade, autonomia e planejamento para organizar as duas gincanas que envolviam em média em torno de seiscentos alunos.

Com a experiência da primeira gincana, as provas da segunda envolveram habilidades diversas, não somente conhecimentos matemáticos, tornando as provas muito mais dinâmicas e inclusivas. Os alunos criaram e adaptaram provas para a Gincana que se tornaram verdadeiros clássicos em estágios, gincanas, oficinas e formações promovidas no curso até os dias de hoje. Podemos destacar o TANGRAST (figura 4), criado em 2015 por um grupo de pibidianos que envolve um Tangram de aproximadamente um metro quadrado com um gancho em cada peça e uma outra peça circular com um gancho e oito cordas presas a ele. Segundo do Regulamento da II GINCAMAT ada equipe é formada por oito alunos. A prova consiste em levar as sete partes do um Tangram a cinco metros da base da construção. Para levar os objetos até a base, os alunos utilizam um gancho acionado por meio de oito cordas presas a ele. Sendo cada aluno responsável por uma corda, estimulando o trabalho em grupo. Segurando ao mesmo tempo as cordas, eles levam os objetos até a base da construção. Quando todas as partes já estiverem na base, os alunos devem montar o Tangram. Ganha quem conseguir montar no menor tempo. Um fato emocionante em uma das pré-gincanas que envolveram o TANGRAST foi a participação em uma das equipes que uma aluno com Síndrome de Down, ele era muito ágil e colaborou para que a equipe vencesse mesmo tendo dificuldades em matemática.

10 Os regulamentos das edições das gincanas, além de fotos e vídeos estão disponíveis em: https://pibidmathtoo.wixsite.com/pibidmatematicautfpr/i-gincamat. Acesso em: 06 jun. 2023.

Figura 4 – TANGRAST nas pré-gincanas de 2015

Fonte: a autora, 2015.

Um segundo clássico é a ESCOMATIVA (figura 5), apresentada pela primeira vez na II GINCAMAT. Os participantes escorregam em uma lona gigante com sabão e estimar qual a distância que percorreram. Nos anos seguintes dos demais professores envolvidos com o PIBID desenvolveram outras ações memoráveis que fizeram com que o Curso de Licenciatura em Matemática alcançasse um reconhecimento por parte das escolas, poder público e comunidade em geral.

Figura 5 – ESCOMATIVA na II GINCAMAT

Fonte: TOO NO PIBID, s.d.[11]

11 Disponível em: https://pibidmathtoo.wixsite.com/pibidmatematicautfpr. Acesso em: 07 jun 2023

A foto abaixo (figura 6) reflete um pouco a vibração do PIBID TOO, ao final da II GINCAMAT, uma integração entre as escolas, pibidianos felizes com a "Torta na Cara" (literalmente). Aquela sensação maravilhosa de missão cumprida, um clima leve e militante de acreditar que uma Educação de Qualidade tanto na Universidade quando nas escolas de base é possível.

Figura 6 – Encerramento de II GINCAMAT

Fonte: TOO NO PIBID, s.d.

No ano de 2016 ocorreram vários ataques do Governo Federal para efetivar cortes no PIBID. Neste ano fizemos várias ações em Defesa do PIBID, panfletagem em escolas, manifesto de apoio ao PIBID no auditório da UNIOESTE e confecção de vídeos #ficapibid. Prevendo as fragilidades de um programa que poderia ser deixado de ofertar, como tantos outros, devido a cortes orçamentários, Marli André já em 2015 defendia que o PIBID deveria ser transformado em política de formação de professores (ANDRÉ, 2015). Felizmente, apesar dos cortes, o PIBID continua ativo!

2 LIÇÕES PARA UMA FORMADORA DE FORMADORES

O trabalho colaborativo entre pibidianos, coordenadores e supervisores auxiliaram tanto na formação inicial dos licenciandos, quanto na formação continuada dos professores universitários e da escola básica.

Para uma professora que estava iniciando a carreira com a formação inicial de professores, o PIBID contribuiu para pensar as disciplinas do curso de licenciatura e as orientações de uma forma mais próxima da escola.

Concordo com Mizukami (2013, p. 23) quando coloca que:

> A docência é uma profissão complexa e, tal como as demais profissões, é aprendida. Os processos de aprender a ensinar, de aprender a ser professor e de se desenvolver profissionalmente são lentos. Iniciam-se antes do espaço formativo das licenciaturas e prolongam-se por toda a vida, alimentados e transformados por diferentes experiências profissionais e de vida. Assim, por excelência, a escola constitui um local de aprendizagem e de desenvolvimento profissional da docência.

As reuniões semanais do PIBID, as orientações e a coordenação das “Pastas” não permitiam a inércia. Eram constantes as reflexões, trocas de ideias e momentos criativos em ambientes não formais que se tornaram uma prática profissional.

O viés militante, com a mobilização para pautas importantes como o #ficapibid mostrou a importância da articulação política e a importância da formação de profissionais críticos.

Após quase dez anos das minhas primeiras experiências com o PIBID percebo o quanto foi importante para a minha formação pessoal e profissional. Pensando no que Jean Piaget escreveu sobre educação moral tenho certeza de que trabalhamos a autonomia e o espírito de solidariedade e isso contribuiu para mudanças positivas tanto pessoais quanto profissionais de todos os envolvidos.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. “O PIBID deveria ser transformado em política de formação de professores”. Entrevistador: Ricardo Prado. **Revista Veras,** São Paulo, v. 5, n. 2, p. 67-77, jul.-dez., 2015. Disponível em: https://site.veracruz.edu.br/instituto/revistaveras/index.php/revistaveras/article/view/229/143. Acesso em: 07 jun. 2023.

GATTI, B. A.; ANDRÉ, M. E. D. A.; GIMENES, N. A. S.; FERRAGUT, L. **Um estudo avaliativo do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).** São Paulo: FCC/SEP, 2014.

MIZUKAMI, M. G. N. Escola e desenvolvimento profissional da docência. *In*: GATTI, B. A; SILVA JÚNIOR, A. C; PAGOTTO, M. D. S; NICOLETTI, M. G. **Por uma política nacional de formação de professores.** São Paulo: EdUnesp, p. 23-54, 2013.

VERTUAN, R. E.; NOVAES, B. W. D.; MERLI, R. F. O que revelam as produções dos bolsistas de iniciação à docência do PIBID-TOO acerca das contribuições desse subprojeto para suas formações docentes. *In*: Quinelato, A. L.; Novaes, B. W. D.; Fernandes, M.; Cordeiro, M. S.; Moreira, R. R.; Lobo, V. S. (org.). UTFPR Toledo 10 anos: crescimento em pesquisa, ensino e extensão. **TOLEDO, PR: DRHS**, Cascavel, 2016, v. 1, p. 16-32.

CAPÍTULO 3

UNIVERSIDADE E COMUNIDADE: UMA PARCERIA ESSENCIAL

Heloisa Cristina da Silva: heloisasilva@utfpr.edu.br
Renato Francisco Merli: renatomerli@utfpr.edu.br

Uma universidade se faz a partir do tripé ensino-pesquisa-extensão. No caso de uma licenciatura, esse tripé é mais evidente, já que o campo de atuação de um futuro professor é a própria escola onde ele realizou estágios, pesquisas e atividades de extensão. Dada essa importante relação, é preciso estabelecer parcerias com a comunidade, em especial, com as escolas da região. Nesse contexto, esse capítulo procura apresentar um panorama das parcerias realizadas ao longo desses dez anos de existência do curso, descrevendo algumas das ações e projetos de extensão que aconteceram, que ainda acontecem e, diante dos novos desafios apresentados, elucubrar também um vislumbre dos futuros projetos.

1 A INDISSOCIABILIDADE ENTRE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO NA UNIVERSIDADE

A palavra “universidade” tem sua origem no latim *universitas*, que se refere a um conjunto, comunidade ou universidade. O conceito da palavra tem sua origem na expressão “*Universitas magistrorum et scholarium*”, que descreve uma comunidade de mestres e estudantes ligados pela mesma escola e interesses culturais (CARVALHO, 1989).

A extensão universitária é uma forma de interação entre a universidade e a comunidade. De acordo com o artigo 207 da Constituição Federal (BRASIL, 1988), as universidades possuem autonomia didático-científica, administrativa e de gestão financeira e patrimonial, e devem seguir o princípio da indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão. Esse princípio surgiu da necessidade de transformar a educação universitária em uma visão de universidade pública, gratuita, autônoma, democrática e socialmente ativa.

A indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão desempenha um papel fundamental nas instituições de Ensino Superior. Ela não apenas promove a produção de conhecimentos técnicos e científicos, mas também contribui para a capacitação de recursos humanos e o progresso social. Essa interligação entre os três aspectos é essencial para a formação de profissionais qualificados e para a promoção do desenvolvimento da comunidade.

Os aspectos congruentes surgem quando a extensão se relaciona com a disseminação do conhecimento proveniente de pesquisas científicas e tecnológicas realizadas nas universidades, direcionadas às comunidades ou populações regionais. Essa dinâmica, conforme descrita por Silva (2000), ocorre em duas fases: a primeira envolve atividades realizadas dentro da universidade, com a participação de estudantes e professores, principalmente por meio do ensino; e a segunda ocorre fora das universidades, atendendo ao público ou à comunidade externa, conhecidas como “ações extensivas”.

A tríade composta por ensino, pesquisa e extensão desempenha um papel crucial na comunidade acadêmica nacional e internacional, representando um compromisso social de grande importância. Esses três pilares abrangem dimensões ético-políticas e didático-pedagógicas, visando à formação profissional e à propagação e produção de conhecimentos científicos (MARTINS; DIAS; MARTINS FILHO, 2016). Para o desenvolvimento efetivo dessa tríade, é essencial que os professores estejam capacitados e atualizados, utilizando metodologias que promovam interações entre os pilares e estimulem o desenvolvimento de saberes e habilidades nos alunos (RABELO, 2011).

No entanto, a formação dos professores muitas vezes ocorre em um ambiente puramente acadêmico, dificultando a incorporação de práticas além do ensino e da pesquisa (FACCO; DISKA; SILVA, 2021). Além disso, a organização curricular muitas vezes não favorece a interdisciplinaridade e não leva em consideração a realidade dos estudantes, o que pode resultar em profissionais tendenciosos a reproduzir práticas viciosas e marcados pela falta de diálogo na relação ensino-aprendizagem.

Como resultado, mesmo sendo obrigatória, a implementação da tríade enfrenta dificuldades entre os estudantes recém-ingressados nas universidades, conforme retratado por Oliveira *et al*. (2021). Isso evidencia a necessidade de os docentes alcançarem dois objetivos iniciais: esclarecer a importância do eixo ensino-pesquisa-extensão e ressaltar sua relevância para a formação dos acadêmicos. Paralelamente, os docentes também devem investigar como abordar e trabalhar de forma mais eficaz esse tripé na academia, a fim de promover uma efetiva qualidade nos processos de ensino e aprendizagem.

Destaca-se ainda que o ensino universitário deve ser compreendido como um processo de crescimento mútuo, por meio da interação professor-estudante, contribuindo para o crescimento individual e compartilhando com a sociedade os resultados dessa interação entre ensinar, pesquisar, aprender e executar (SOUSA, 2020).

Segundo Oliveira *et al*. (2021), os novos conhecimentos adquiridos por meio da pesquisa científica devem ser introduzidos nas salas de aula universitárias, promovendo a interconexão entre ensino e pesquisa. Conforme ressaltado por Freire (1996, p. 29): "[...] não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino". E, mais do que nunca, não há ensino e pesquisa sem extensão, um atributo reforçado pela Resolução n.º 7, de 18 de dezembro de 2018 (BRASIL, 2018), que regulamenta as atividades de extensão no âmbito universitário.

Nesse contexto, objetivou-se trazer as relações estabelecidas entre ensino, pesquisa e extensão a partir de alguns dos projetos de extensão que aconteceram ou têm acontecido ao longo desses dez anos de existência do curso de licenciatura em matemática.

2 CLUBE DA MATEMÁTICA E O EMBRIÃO PARA JUNÇÃO DOS PROJETOS

Diante da necessidade de uma parceria duradoura entre universidade e escola, o curso de Licenciatura em Matemática decidiu criar um projeto, que seria o embrião para um programa, ou seja, um projeto maior que englobaria todos os outros projetos que a Coordenação da Matemática tinha e os que viesse a criar.

Cabe aqui um parêntese para destacar, no quadro 1, alguns dos projetos[1] que foram e vêm sendo realizados ao longo dos anos pela Coordenação da Matemática (COMAT).

---

1 Os dados apresentados nos quadros 1 e 2 são oriundos do sistema de gestão de certificados da UTFPR e de um formulário enviado aos professores da COMAT. Além disso, estão contabilizados apenas projetos formalizados, ações e eventos não aparecem no quadro. Nesse contexto, é provável que muitos projetos não tenham sido contemplados. Disponível em: http://apl.utfpr.edu.br/extensao/certificados/listaPublica. Acesso em: 26 abr. 2024.

Quadro 1: Projetos Desenvolvidos pela COMAT[2]

Nome do Projeto	Coordenador do Projeto	Início do Projeto	Fim do Projeto	Quantidade estimada de participantes
Reflexões acerca do ensino de Matemática a partir da BNCC: Ensino Fundamental	Heloisa Cristina da Silva	07/2020	07/2021	31
Clube de Matemática e de Ciências	Renato Francisco Merli	04/2017	04/2019	200
Introdução à Lógica Matemática e de Programação por meio de Jogos para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental	Heloisa Cristina da Silva	08/2018	12/2018	40
Cursinho Pré Vestibular	Renato Francisco Merli	02/2020	-	200
Tira Dúvidas	Renato Francisco Merli	02/2020	-	200
Reforço e Aulas Preparatórias Para Vestibular e Provas do Enem	Araceli Ciotti de Marins	07/2020	07/2021	50
Desenvolvimento de Jogos Digitais para Ensino de Matemática Básica[3]	Heloisa Cristina da Silva	08/2020	07/2021	20
Grupo da Quarta - formação continuada de professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental	Rodolfo Eduardo Vertuan	06/2021	-	100
Cubo Mágico	Renato Francisco Merli	05/2023	-	

Fonte: os autores, 2023.

Nesse contexto, a ideia de criar um projeto intitulado Clube da Matemática soou com grande potencial, uma vez que a noção de clube, no senso comum, é a associação de um conjunto de pessoas com interesses em comum.

De acordo com Oliveira e Cedro (2015, p. 19), um Clube de Matemática pode ser caracterizado como:

> [...] um espaço de aprendizagem dos estudantes [...] e, concomitantemente, como espaço de formação docente. Ele é organizado tomando como premissa a ludicidade, como forma de motivar as crianças à apropriação dos

2 Em relação ao coordenador do projeto apresentado no quadro, salientamos que podem existir outros nomes.

3 Até o momento da escrita deste texto o projeto ainda estava em fase de preparação dos executores para elaboração das oficinas a serem executadas nas escolas.

> conhecimentos matemáticos, e as ações e reflexões coletivas dos sujeitos, de modo a possibilitar o compartilhamento de ideias e de saberes entre os pares.

Nesse sentido, Cedro (2004, p. 52) aponta que a principal meta de um Clube é "[...] criar um ambiente para o desenvolvimento de atividades educativas que possibilitem a discussão dos mais variados aspectos dentro do meio educacional". Historicamente:

> [...] a criação dos primeiros Clubes de Matemática surgidos nos Estados Unidos, de acordo com Morgado (1996), remonta às décadas de 30 e 40. Segundo ele, tais clubes foram criados com intuito de serem auxiliares poderosos na propaganda da Matemática, no fortalecimento do convívio entre os interessados nesta disciplina, e também poderem inclusive ajudar a resolver algumas dificuldades na aprendizagem da Matemática. (CEDRO, 2004, p. 51-52)

Para Silva (2010, p. 28), as atividades realizadas no Clube podem contribuir para o melhor entendimento dos conceitos matemáticos e científicos, e favorecer o desenvolvimento de atitudes essenciais frente à matemática pelos educandos. Essas atitudes são compreendidas como estímulo à construção do conhecimento matemático e científico, à curiosidade, à tomada de decisão baseada em análises e conclusões, à colaboração, ao trabalho em equipe, à perseverança na busca de soluções, promovendo o acreditar mais em si mesmo e o gosto pela matemática.

Nesse contexto, o projeto foi criado em 2017 tendo como os objetivos divididos entre três (ou quatro) "atores" participantes do projeto: estudantes da Educação Básica, estudantes de graduação (com enfoque nos estudantes da licenciatura em matemática, enquanto espaço para formação inicial) e, professores da Educação Básica e do Ensino Superior (enquanto espaço formação continuada).

No que consiste aos estudantes da Educação Básica, era esperado: desmistificar a imagem da Matemática como o "bicho papão" do sistema educativo; combater o insucesso escolar; modificar a atitude do aluno face às ciências exatas, fazendo-o tomar consciência das aplicações em áreas por vezes insuspeitas e, indiretamente, na própria tecnologia que usa diariamente; satisfazer a curiosidade e levar um pouco mais longe a compreensão matemática e científica daqueles que, embora já com uma postura positiva e um gosto face à essas disciplinas, não têm oportunidades de acesso a outros meios de satisfazer a curiosidade; ocupar o tempo livre dos alunos através da concretização de atividades apelativas com caráter formativo; desenvolver a capacidade de interpretar e resolver problemas; desenvolver o raciocínio lógico e o cálculo mental.

Do ponto de vista dos estudantes de graduação, fortemente os licenciandos em Matemática (formação inicial), objetiva-se: prepará-los para o exercício de sua profissão na área de Matemática; estender a compreensão da Matemática para além da sala de aula; despertar o interesse criativo-construtivo através da criação e construção de materiais e jogos didáticos; estimular talentos científicos através da iniciação dos estudantes em projetos de pesquisa e extensão; aproximar a universidade da comunidade local, criando um espaço para atividades experimentais fazendo-se uso dos materiais convencionais e/ou alternativos; socializar o ensino da Matemática e de Ciências através da formação de estudos e pesquisas; organizar e planejar atividades de ensino; e refletir sobre sua ação pedagógica.

Em relação aos professores da Educação Básica e do Ensino Superior (formação continuada), procurava-se: retomar conhecimentos de matemática da Educação Básica até então não trabalhados; ressignificar a prática docente a partir de um modelo de ensino diferenciado; estreitar os laços entre estudantes e professores; compartilhar vivências e aprender a trabalhar em espaços colaborativos de ensino e aprendizagem; estreitar os laços entre professores da Educação Básica e do Ensino Superior; possibilitar articulações entre a matemática do Ensino Superior e a matemática da Educação Básica, além dos outros conteúdos de cálculo, geometria analítica, álgebra linear, equações diferenciais, entre outras.

Ao longo dos anos esses objetivos foram parcialmente alcançados até que, em 2019, com o aparecimento da Pandemia do covid-19, o projeto teve que ser encerrado. Infelizmente, até o momento não foi retomado.

3 OFICINAS DE MATEMÁTICA E GINCANAS[4]

As oficinas de matemática podem ser compreendidas como atividades diferenciadas, em que os alunos desenvolvem atividades mais práticas, com equipamentos diferentes, visando ao aprendizado de matemática sob a supervisão de um professor capacitado (PARANÁ, s.d.). No curso de Licenciatura em Matemática, *campus* Toledo, as oficinas acontecem uma vez por semestre

4 As oficinas de matemática e as gincanas, apesar de não aparecerem no quadro 1 como projetos formalmente constituídos no Departamento de Extensão do *campus* da UTFPR de Toledo, merecem destaque no texto por serem a primeira e mais duradoura atividade do curso.

e tiveram sua primeira edição no primeiro semestre de 2015 tendo como público-alvo alunos do Ensino Médio.

No segundo semestre do mesmo ano, as oficinas foram destinadas aos alunos do Ensino Fundamental e Médio. No segundo semestre de 2017 iniciaram as oficinas da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 4, com aplicação de oficinas para alunos do Ensino Superior. As oficinas da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 4 atendem um público de modalidades diferenciadas como pais de alunos, alunos do Ensino Superior, professores de matemática, entre outros. Isso acontece pela característica da disciplina, que tem como objetivo atender modalidades diferenciadas de ensino como Educação de Jovens e Adultos, professores, Educação Infantil, Ensino Fundamental I, entre outras.

A organização das oficinas passou por várias modificações ao longo das edições. No quadro 2, a seguir, temos um resumo das oficinas e gincanas realizadas ao longo desses anos.

Quadro 2: Oficinas e Gincanas desenvolvidas pela COMAT[5]

Local	Ano/Semestre	Público-alvo	Tipo
UTFPR	2015/1	EM	Oficina
UTFPR	2015/2	EF e EM	Oficina
UTFPR	2017/2	EF e EM	Gincana
Centro da Juventude – Jardim Coopagro	2017/1 2017/2	EM	Gincana
UTFPR	2018/1	EF e EM	Gincana
UTFPR	2017/1 2017/2	EF e EM	Oficina
Colégio Estadual Castelo Branco (PREMEN)	2017/1 2017/2	EM	Oficina
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre	2017/2	EF e EM	Oficina
UTFPR	2018/1	EF, EM e ES	Oficina
UTFPR	2018/1	EF	Oficina
Colégio Estadual Castelo Branco (PREMEN)	2018/2	EM	Gincana
Colégio Estadual Jardim Gisele	2018/2	EF e EM	Gincana

continua

5 Utilizaremos as seguintes siglas para simplificar o quadro: EM – Ensino Médio, EF – Ensino Fundamental e ES – Ensino Superior.

Local	Ano/Semestre	Público-alvo	Tipo
Colégio Estadual Antônio José Reis	2018/2	EF e EM	Gincana
UTFPR	2019/1 2019/2	Professores do 5o e 6o anos	Oficina
UTFPR	2019/2	EF e EM	Gincana
Colégio Estadual Antônio José Reis	2019/1	EF, EM e Pais de alunos	Oficina
UTFPR	2019/2	ES	Oficina
Colégio Estadual Dario Vellozo	2019/2	EF	Oficina
Colégio Estadual Jardim Europa	2019/2	EF e EM	Oficina
UTFPR	2019/1 2019/2	ES	Oficina
ONLINE	2021/1	EF e EM	Vídeo
ONLINE	2021/2	EF e EM	Oficina
UTFPR	2022/2	EF, EM e ES	Oficina
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre	2022/1	EF	Oficina
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre	2022/1	EF e EM	Oficina
SESC	2022/1	EF	Oficina
Colégio Estadual Novo Sobradinho	2022/2	EF e EM	Oficina
UTFPR	2023/1	EF, EM e Professores do Ensino Fundamental I – Anos Iniciais	Oficina
UTFPR	2023/1	EF e EM	Gincana

Fonte: os autores, 2023.

Em alguns semestres foram aplicadas em um único período (manhã ou tarde), em outros a aplicação aconteceu o dia inteiro (manhã e tarde ou manhã, tarde e noite). Quanto ao local de desenvolvimento, as oficinas acontecem na própria UTFPR aos sábados ou em colégios da cidade de Toledo, aos sábados ou durante a semana. No caso do ano de 2020, as oficinas não aconteceram e, em 2021, elas aconteceram de forma ONLINE, conforme pode-se identificar no quadro 2. Essas diferentes configurações na aplicação das oficinas nos possibilitaram perceber prós e contras. A aplicação na universidade tem como vantagem o acesso mais fácil aos materiais, pois muitos deles estão no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e podem ser facilmente utilizados.

As salas de aula também podem ser preparadas com antecedência, na sexta-feira à noite, e com isso, podem ser utilizados mais recursos decorativos para o envolvimento dos alunos nas oficinas. Além disso, os alunos dos colégios podem ter a oportunidade de conhecer a estrutura da universidade, a qual nem sempre teriam acesso, não fossem as oficinas. Já a aplicação nos colégios, principalmente durante a semana, dá a oportunidade de que, mesmo alunos que não tenham afinidade com matemática, a percebam de forma diferente, mais atrativa.

As atividades a serem aplicadas são elaboradas pelos alunos das disciplinas de Estágio Curricular na Educação Básica, porém em algumas edições também participaram alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e do Residência Pedagógica (RP). Fazem parte da preparação para as oficinas a elaboração de um tema, plano de aula e materiais necessários ao desenvolvimento da oficina. Antes da aplicação da oficina com os alunos da Educação Básica, são realizadas prévias com os alunos dos estágios e seus respectivos professores. A intenção é realizar um teste que possibilita perceber se a oficina está adequada aos objetivos propostos no plano de aula e sugerir ajustes necessários. Cada oficina tem duração de 1 hora e 30 minutos e são aplicadas duas ou quatro vezes a cada edição. Durante a aplicação das oficinas há professores avaliadores, que preenchem uma ficha de avaliação com relação à oficina que está acompanhando. Essas avaliações são bastante importantes para o desenvolvimento do estágio.

Ao término das oficinas é realizada a gincana que são provas em que normalmente se faz uso de habilidades e agilidade física, porém com a inserção dos conteúdos matemáticos desenvolvidos durante as oficinas. Para a realização da gincana se destina em torno de trinta minutos. Em algumas edições a gincana foi realizada em sala de aula com a última turma de aplicação da oficina, em outras edições se dividia os alunos em equipes e se realizava a gincana no ginásio da universidade. Nesse segundo caso, ao final da gincana, havia uma única equipe vencedora. No primeiro caso, havia uma equipe vencedora em cada sala de aula.

A realização das oficinas e da gincana é importante como forma de divulgação tanto do curso de Licenciatura em Matemática, quanto da própria matemática. Nossos alunos estão acostumados a ouvir que matemática é importante em nossas vidas e que está em todo lugar, mas normalmente no cotidiano de sala de aula pouco se explora atividades que mostrem essas características da matemática. Além disso, o fato de não estarmos vinculados a um currículo proporciona abordar conteúdo ou assuntos que não constam nos currículos escolares, mas que trazem aspectos bastante importantes da matemática.

4 CURSINHO PRÉ-VESTIBULAR E TIRA-DÚVIDAS

Levando em consideração que a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão desempenha um papel fundamental nas instituições de Ensino Superior e que ela não apenas promove a produção de conhecimentos técnicos e científicos, mas também contribui para a capacitação de recursos humanos e o progresso social; existe uma dinâmica particular associada a esse tripé.

Essa dinâmica, conforme descrita por Silva (2000), ocorre em duas fases: a primeira envolve atividades realizadas dentro da universidade, com a participação de estudantes e professores, principalmente por meio do ensino; e a segunda ocorre fora das universidades, atendendo ao público ou à comunidade externa, conhecidas como “ações extensivas”. Essas duas fases, em cursos de licenciatura, acontecem quase que de forma simultânea, uma vez que a própria atividade fim acontece fora das universidades. Nesse contexto, projetos de extensão que emergem de cursos de licenciatura buscam melhorias na qualidade da educação de modo a causar impactos tanto na formação de futuros docentes quanto na sociedade que os rodeia.

Assim, numa breve pesquisa, identificamos que pessoas carentes, incluindo alunos da Educação Básica e adultos fora da escola, não têm condições de pagar um cursinho pré-vestibular para se preparar para o ENEM ou algum vestibular de uma instituição pública.

Sparta e Gomes (2005), num estudo sobre a importância atribuída ao ingresso na educação superior por alunos do ensino médio em escolas públicas e privadas, mostraram que 86,2 % dos jovens entrevistados pretendiam prestar vestibular para um curso superior. Contudo, em escolas públicas, esse número cai para 77 %. Outro aspecto importante ressaltado pelos autores é a necessidade de ingresso no mercado de trabalho logo após o ensino médio, onde 64,2 % dos estudantes da escola pública responderam positivamente a isso, enquanto apenas 31,1 % dos estudantes da escola privada mostraram tal necessidade.

Mitrulis e Penin (2006), discutindo a questão da igualdade e da equidade em pré- vestibulares alternativos, chegaram à conclusão de que ações afirmativas de universidades públicas em prol da inclusão de jovens de segmentos populares, têm se mostrado frutíferas, à medida que elas são acompanhadas de outras atividades de socialização com a comunidade. Além disso, as autoras dizem que os alunos que participaram de tais ações se mostraram mais felizes e capacitados para ingressar no ensino superior. Zago (2008), num estudo sobre as perspectivas e limites dos cursos pré- vestibulares, afirma que tais cursos promovem a democratização do acesso ao ensino superior, buscando corrigir algumas desigualdades historicamente impostas a determinados grupos sociais.

Levando essa conjuntura em consideração, a UTFPR, Toledo, em parceria com a UFPR – Palotina, tem criado ações que possam ajudar essa população mais vulnerável a alçar voos maiores, como por exemplo, maior acesso às universidades públicas.

Nesse contexto, desde 2020, têm sido realizados os projetos Cursinho Pré-Vestibular[6] e Tira Dúvidas de Matemática de forma concomitante. O primeiro, tem sido realizado às terças-feiras à noite entre os horários das dezenove às vinte e duas horas, sendo ministradas aulas semanais de resolução de problemas do ENEM e de vestibulares da UFPR. As aulas são de forma *on-line* por meio do *Youtube*.[7] Essas aulas são ministradas por acadêmicos do curso de matemática que estão participando do Residência Pedagógica, do Estágio Supervisionado e aqueles que tenham interesse (incluindo acadêmicos de outros cursos, professores e técnicos). Também participam egressos do curso de matemática, bem como professores do curso de matemática.

O segundo projeto, do Tira Dúvidas, acontece diariamente das sete horas e trinta minutos às vinte e três horas, incluindo finais de semana e feriados. Vale ressaltar que, como se trata de um Tira Dúvidas online (em sua maior parte do tempo —, mas que não exclui ser presencial e nas escolas que desejem participar), os horários são meramente indicativos. Os alunos participantes podem tirar dúvidas de três modos: utilizando um grupo do *WhatsApp* específico para isso, presencialmente na própria UTFPR ou de forma online, sendo esses dois últimos agendados previamente por meio de um formulário online.

---

6 Cf.: PRÉ-VESTIBULAR COMUNITÁRIO, s.d. Disponível em: https://cursinhoufpr.wixsite.com/prevec. Acesso em: 26 abr. 2024.

7 Disponível em: https://www.youtube.com/@prevec. Acesso em: 26 abr. 2024.

No canal do PREVEC no Youtube temos cinquenta e nove vídeos de Matemática gravados com visualizações de alguns vídeos que superam mais de mil visualizações, totalizando mais de quatro mil visualizações. Esse projeto, além de ter um impacto grande, também atende um público diferenciado, por exemplo, detentas de um presídio do Paraná que assistem às aulas gravadas no outro dia.

No caso do Tira Dúvidas, atendemos alunos de todo Brasil, temos tido participantes de diferentes estados do país, entre eles, Santa Catarina, Espírito Santo, Amazonas, Pará e Rio Grande do Norte. Foram dúvidas desde a Educação Básica até o Ensino Superior. No grupo do *WhatsApp* contamos com mais de trinta colaboradores que estão sempre atentos às dúvidas dos alunos.

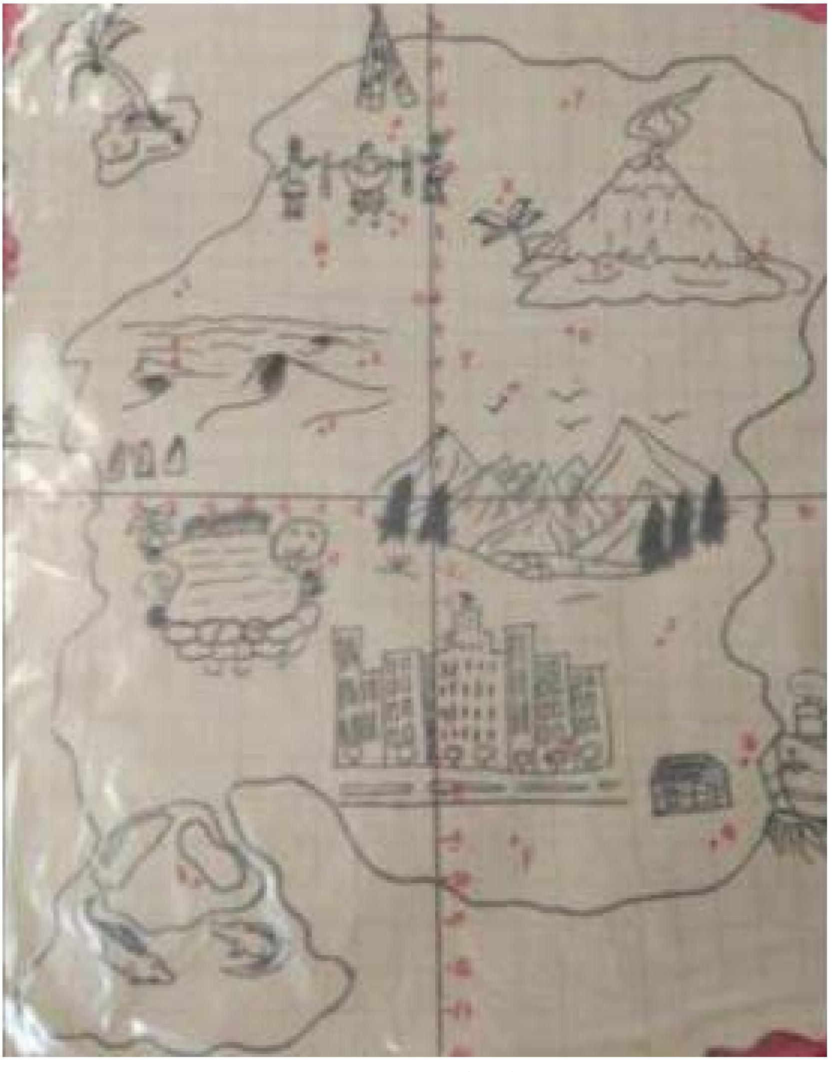
Tais projetos têm se mostrado muito profícuos e transformadores, uma vez que temos recebidos diversos *feedbacks* de participantes que passaram no vestibular ou que ingressaram na universidade após participarem do projeto.

5 PRODUÇÃO DE GAMES

O projeto de produção de jogos para o Ensino Básico teve seu início no segundo semestre de 2020 com a intenção de fazer uma versão digital de jogos elaborados pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática e que estavam armazenados no LEM. Esses jogos eram elaborados para alguma disciplina ou para as oficinas e gincana e posteriormente ficavam sem uso no LEM. Vendo essa situação, um grupo de professores, da matemática e da Tecnologia de Sistemas para a Internet, criaram um projeto de extensão visando a elaborar as versões digitais dos jogos para que em algum momento se pudesse disponibilizar os jogos nas versões digitais para a comunidade externa com a intenção de que os jogos pudessem auxiliar no estudo de matemática de alunos da Educação Básica.

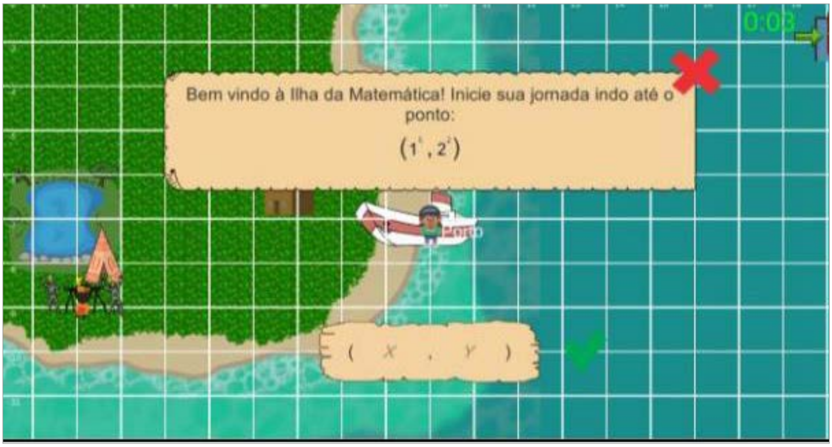
O projeto iniciou de forma bastante ingênua, imaginando que precisaríamos somente transferir o jogo da versão analógica para a digital. Porém ao final do primeiro semestre já se percebia que para uma versão digital precisaríamos de novos elementos. Um exemplo disso é o prêmio. O primeiro jogo que teve sua versão digital era composto por uma única fase (Figura 1) e tinha como prêmio um bombom para o aluno vencedor, mas na versão digital o bombom não era um prêmio possível e uma única fase era pouco para um jogo digital (Figura 2). No caso deste primeiro jogo, ele foi elaborado para uma oficina de matemática, projeto citado anteriormente, e se tratava de um jogo do tipo caça ao tesouro. A intenção era que os alunos compreendessem o sistema de coordenadas cartesianas e tinha como público-alvo alunos de 8.º e 9.º anos.

Figura 1: Jogo analógico



Fonte: Da pesquisa (2020).

Figura 2: Versão digital



Fonte: Da pesquisa (2021).

A partir do primeiro semestre de 2021 mais professores passaram a integrar o projeto e se percebeu a necessidade por realizar estudos relacionados ao *Game Design*, gamificação, entre outros. Algumas dificuldades foram surgindo pelo caminho como encontrar alunos que permanecessem tempo suficiente no projeto e que se dedicassem tempo necessário para desenvolver um jogo ou uma etapa completa de um jogo.

Atualmente temos um jogo em uma primeira versão, à qual foi aplicada em uma Semana Acadêmica da Matemática, vinculada ao curso, e uma outra aplicação está sendo planejada. As aplicações auxiliam, pois mostram problemas não percebidos pela equipe que elaborou o jogo e também nos fornecem informações sobre o que pode ser aprimorado. Dentro das atividades do projeto foram desenvolvidos dois trabalhos de conclusão de curso (SILVA, 2022; SPOHR, 2022), cada um deles com um jogo elaborado, faltando a realização da parte de programação para que possam ser aplicados em fase de testes. Tivemos ainda dois artigos publicados em eventos nacionais, na SBGames (SANTOS; CAMARGO; SCHEFFEL; MERLI; PEZUTTI; LIMA; SILVA; 2022) e no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) (SPOHR; MERLI; SILVA, 2022).

Esses resultados de pesquisa aliados às parcerias com as escolas mostram a indissociabilidade existente entre pesquisa e extensão e, corrobora com Silva (2000) de que existe uma dinâmica entre ensino-pesquisa-extensão que envolve atividades realizadas dentro da universidade, com a participação de estudantes e professores, principalmente por meio do ensino e atividade ocorrem fora das universidades, atendendo ao público ou à comunidade externa, conhecidas como "ações extensivas".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos concluir que o tripé ensino-pesquisa-extensão desempenha um papel fundamental na formação de profissionais qualificados e no desenvolvimento da comunidade. Essa indissociabilidade entre os três aspectos é essencial para transformar a educação universitária em uma visão de universidade pública, gratuita, autônoma, democrática e socialmente ativa.

A extensão universitária é uma forma de interação entre a universidade e a comunidade, levando o conhecimento produzido na instituição para além dos muros acadêmicos e promovendo ações que atendam às necessidades da população. No caso da licenciatura, essa relação se torna ainda mais evidente, uma vez que o campo de atuação dos futuros professores é a própria escola onde eles realizam estágios, pesquisas e atividades de extensão.

Ao estabelecer parcerias com a comunidade, especialmente com as escolas da região, a universidade fortalece sua responsabilidade social e contribui para o desenvolvimento educacional e social do entorno. Essas parcerias permitem a realização de projetos e ações de extensão que beneficiam tanto os estudantes universitários, proporcionando experiências práticas e aproximando-os da realidade profissional, quanto a comunidade, que recebe os benefícios dessas iniciativas.

Ao longo dos dez anos de existência do curso de licenciatura em matemática, foram realizadas diversas parcerias e projetos de extensão que demonstram a importância da interligação entre ensino, pesquisa e extensão. Essas ações contribuem para a formação dos futuros professores, promovem a disseminação do conhecimento científico e tecnológico para a comunidade e possibilitam o desenvolvimento de novos projetos que enfrentem os desafios presentes e futuros.

No entanto, apesar da importância da tríade ensino-pesquisa-extensão, ainda existem desafios a serem enfrentados. A formação dos professores muitas vezes ocorre de forma dissociada das práticas de extensão, o que dificulta a incorporação de experiências além do ensino e da pesquisa. Além disso, a falta de interdisciplinaridade e a desconexão com a realidade dos estudantes podem comprometer a efetividade dessas práticas.

Portanto, é essencial que os docentes estejam capacitados e atualizados, utilizando metodologias que promovam a integração entre os três pilares e estimulem o desenvolvimento de saberes e habilidades nos alunos. É necessário esclarecer a importância do tripé ensino-pesquisa-extensão e buscar formas mais eficazes de abordar e trabalhar essa integração na academia, a fim de promover uma educação de qualidade e impactar positivamente a sociedade.

Assim, esses projetos de extensão que envolvem atividades como Clube de Matemática nas escolas, Cursinho Pré Vestibular e Tira Dúvidas, Oficinas e Gincanas de Matemática e Produção de Games Pedagógicos para Matemática desempenham um papel fundamental na promoção do ensino e aprendizagem da disciplina. Essas iniciativas têm grande importância, pois proporcionam um ambiente de aprendizagem diferenciado e interativo, estimulando o interesse dos estudantes pela Matemática.

O Clube de Matemática nas escolas, por exemplo, oferece um espaço extracurricular onde os alunos podem explorar conceitos e resolver problemas matemáticos de forma lúdica e desafiadora. Essa abordagem contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da criatividade dos estudantes, além de promover a socialização e o trabalho em equipe.

O Cursinho Pré Vestibular de Matemática, por sua vez, desempenha um papel importante na preparação dos estudantes para os exames de ingresso nas universidades. Através de aulas e atividades voltadas especificamente para o conteúdo matemático exigido nos vestibulares, o cursinho auxilia os alunos a consolidarem seus conhecimentos e a adquirirem habilidades necessárias para obterem um bom desempenho nessa disciplina.

O Tira Dúvidas de Matemática oferece um suporte personalizado aos estudantes, proporcionando um espaço para que possam esclarecer suas dúvidas e receber orientações específicas sobre os conteúdos matemáticos que encontram dificuldades. Essa iniciativa contribui para a superação de obstáculos individuais e para a melhoria do desempenho dos alunos, auxiliando-os a avançar em seu aprendizado.

As Oficinas de Matemática, por sua vez, proporcionam uma abordagem prática e dinâmica do ensino da disciplina. Através de atividades interativas, manipulação de materiais e resolução de problemas contextualizados, as oficinas estimulam a participação ativa dos alunos, promovendo a compreensão dos conceitos matemáticos de forma concreta e significativa.

As Gincanas de Matemática são eventos que buscam envolver os estudantes de maneira divertida e desafiadora. Através de competições, jogos e atividades que exploram diferentes áreas da Matemática, as gincanas estimulam o interesse pela disciplina, incentivam o trabalho em equipe e desenvolvem habilidades como agilidade mental, raciocínio rápido e resolução de problemas sob pressão.

Por fim, a Produção de Games Pedagógicos para Matemática utiliza a tecnologia como ferramenta de ensino. Através da criação de jogos digitais que abordam conceitos matemáticos, os estudantes podem aprender de forma mais interativa e autônoma. Essa abordagem lúdica e tecnológica contribui para o engajamento dos alunos e para o desenvolvimento de habilidades como o pensamento estratégico, a resolução de problemas e a persistência.

Esses projetos de extensão têm um impacto significativo no ensino e aprendizagem da Matemática, proporcionando experiências enriquecedoras que vão além das salas de aula tradicionais. Eles estimulam o interesse pela disciplina, promovem o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais, e contribuem para a formação de cidadãos críticos e capacitados.

Em resumo, a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão é fundamental para a formação de profissionais qualificados e o progresso social. A partir das parcerias com a comunidade e dos projetos de extensão, é possível fortalecer essa relação e promover uma educação universitária comprometida com a transformação social e o desenvolvimento da sociedade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Câmara de Educação Superior. Resolução n. 7, de 18 de dezembro de 2018. Estabelece as Diretrizes para a Extensão na Educação Superior Brasileira e regimenta o disposto na Meta 12.7 da Lei n. 13.005/2014, que aprova o Plano Nacional de Educação – PNE 2014-2024 e dá outras providências. **Diário Oficial da União:** seção 1, Brasília, n. 243, p. 49-50, 19 dez. 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil (1988).** Brasília, DF: [*s.n.*], 1988.

CARVALHO, J. **História das instituições e pensamento político:** 1930-c.1957. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989. Obra completa, v. 6, 561 p.

CEDRO, W. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino:** o Clube de Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

FACCO, H. S., DISKA, N. M., SILVA, G. P. As vivências como metodologia de ensino da extensão rural: a aproximação entre estudantes e agricultores para a compreensão da realidade social. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 102, p. 821-838, 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

MARTINS, R. E. M. W.; DIAS, J.; MARTINS FILHO, L. J. O contexto do ensino, pesquisa e extensão na formação docente na Faculdade de Educação da Universidade do Estado de Santa Catarina. **Revista de Educação**,Campinas, v. 21, n. 2, p. 243-254, 2016. DOI: 10.24220/2318-0870v21n2a2893. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/2893. Acesso em: 5 jun. 2023.

MITRULIS, E; PENIN, S. T. S. Pré-vestibulares alternativos: da igualdade à equidade. **Cadernos de Pesquisa**, v. 36, n. 128, p. 269-298, maio-ago. 2006. Disponível em: Acesso em: 01. jun. 2023.

OLIVEIRA, R. E. de; FIGUEIREDO, R. A. de; MAKISHI, F..; SAIS, A. C.; OLIVAL, A. de A..; ALCÂNTARA, L. C. S.; MORAIS, J. P. G. de; VEIGA, J. P. C. A interdisciplinaridade na prática acadêmica universitária: conquistas e desafios a partir de um projeto de pesquisa-ação. **Avaliação: revista da avaliação da educação superior**, Campinas; Sorocaba, SP, v. 26, n. 2, p. 377-400, 2021. Disponível em: https://periodicos.uniso.br/avaliacao/article/view/4691. Acesso em: 5 jun. 2023.

OLIVEIRA, D. C. de; CEDRO, W. L. Clube de Matemática: a singularidade na organização do ensino pelos professores de Goiânia. *In*: CEDRO, W. L. (org.). **Clube de Matemática:** vivências, experiências e reflexões. Curitiba: CRV, 2015.

PARANÁ. Secretaria da Educação do Paraná. **Sugestões de atividades – oficinas.** Curitiba. Disponível em: https://encurtador.com.br/aHTY2. Acesso em: 05 jun. 2023.

RABELO, F. S. A Formação do Pedagogo em Contexto Hospitalar: reflexões e práticas na garantia do direito à educação da criança e do adolescente hospitalizado. **Cidadania em Ação: Revista de Extensão e Cultura**, Florianópolis, v. 5, n. 1, 2011. DOI: 10.5965/cidea.v5i1.2222. Disponível em: https://revistas.udesc.br/index.php/cidadaniaemacao/article/view/2222. Acesso em: 5 jun. 2023.

SANTOS, A. *et al*. L2T: an algorithm to support the generation of 2D texture from LaTeX Math Equations. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE JOGOS E ENTRETENIMENTO DIGITAL (SBGAMES), 21. , 2022, Natal. **Anais [...]**. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2022. p. 85-90. Disponível em: https://sol.sbc.org.br/index.php/sbgames/article/view/23460. Acesso em: 5 maio 2023.

SILVA, L. A. M. da. **Interstellar Math**: design de um game pedagógico. 2022. Monografia (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo,

2022. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31515. Acesso em: 05 maio 2023.

SILVA, M. S da. **Clube de matemática:** jogos educativos. 2. ed. Campinas: Papirus, 2010.

SILVA, P. B. A dimensão da extensão nas relações com o ensino e a pesquisa. *In*: ARAGÃO, R. M. R.; SANTOS NETO, E.; SILVA, P. B. **Tratando da indissociabilidade ensino, pesquisa, extensão.** São Bernardo do Campo: UMESP, 2000.

SPARTA, M.; GOMES, W. B. Importância Atribuída ao Ingresso na Educação Superior por Alunos do Ensino Médio. **Revista Brasileira de Orientação Profissional**, v. 6, n. 2, dic., p. 45-53, 2005. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2030/203016893005.pdf. Acesso em: 01 jun. 2023.

SOUSA, M. N. A. **Trilhas Acadêmicas:** caminhos para a concepção, execução e publicação de artigos cientificos. Curitiba: CRV, 2020, v. 1, p. 140.

SPOHR, A. M. C. **Clash do Math**: design de um jogo pedagógico digital para o ensino de História da Matemática. 2022. Monografia (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2022. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/30648. Acesso em: 31 maio 2023.

SPOHR, A. M. C.; MERLI, R. F.; SILVA, L. A. M. Articulações Entre O Design Pedagógico e o Design de Games na Adequação de um Jogo Pedagógico. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: educação matemática, escola e docência - o que nos trouxe Ubiratan D'Ambrósio, 14., 2022. **Anais eletrônicos...** Brasília: SBEM, 2022. v. 1. p. 1-14. Disponível em: https://encurtador.com.br/qW689. Acesso em: 05. maio 2023.

ZAGO, N. Cursos pré-vestibulares populares: limites e perspectivas. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 26, n. 1, p. 149-174, jan.-jun., 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795x.2008v26n1p149/9569. Acesso em: 01 jun. 2023.

CAPÍTULO 4

REELABORANDO OFICINAS DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA: MATERIAIS DIDÁTICOS PRODUZIDOS NA IMPRESSORA 3D

Vanessa Largo Andrade: vanessalargo@utfpr.edu.br
Aline Keryn Pin: alinepin@utfpr.edu.br
Renato Francisco Merli: renatomerli@utfpr.edu.br

A Formação Inicial de Professores desempenha um papel crucial na preparação dos futuros educadores para enfrentar os desafios da sala de aula inclusiva. Além de se apropriarem de conhecimentos consistentes sobre a Matemática que ensinam e estratégias pedagógicas adequadas, os professores também precisam desenvolver uma compreensão acerca dos estudantes apoiados pela Educação Especial, incluídos nas salas de aula comuns do ensino regular.

Ao conhecer os sujeitos para quem se ensina, os professores são capazes de, além de identificar barreiras que podem dificultar a aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática, de pensar em estratégias para lidar com elas, ultrapassá-las e superá-las, ou seja, são capazes de adaptar os métodos de ensino, materiais e recursos para garantir que todos os alunos tenham acesso equitativo à educação matemática. Nessa perspectiva, Cintra (2014, p. 2), manifesta que "[...] apesar do sucesso da inclusão de alunos com deficiência na escola regular depender, entre muitos outros fatores, dos professores, esse tema tem ficado ausente dos cursos de formação inicial ou continuada".

Borges, Cyrino e Nogueira (2020, p. 149) afirmam sobre a importância de que a "[...] promoção de ações formativas na graduação, com o envolvimento dos futuros professores e dos estudantes com deficiência, pode promover uma heterogeneidade benéfica, bem mais profícua às aprendizagens do que ambientes mais homogêneos", expondo assim, os professores que ensinam matemática em formação, a situações cotidianas, imbricadas de heterogeneidade, retratando de certo modo, as situações presentes nas salas de aula. Nesse sentido:

> [...] ao identificarmos uma abordagem não transversal da Inclusão Educacional, vemos a necessidade de avançar no sentido de que, se defendemos que as tarefas que propomos aos nossos estudantes é que devem ser potencialmente inclusivas, todas as disciplinas poderiam contribuir nesse debate, com a inclusão educacional deixando de ser tratada em paralelo, entre parênteses, por outros departamentos/colegiados etc. Portanto, urge um número maior de disciplinas incitando discussões para colaborar com a temática (BORGES; CYRINO; NOGUEIRA, 2020, p. 153).

Por conseguinte, no segundo semestre de 2022, a PROGRAD lançou um edital que contemplou os cursos de Licenciatura da UTFPR com incentivos por meio de bolsas para acadêmicos, para o desenvolvimento da produção de conhecimentos e práticas pedagógicas, buscando a melhoria da qualidade para a formação inicial e continuada de professores.

Vislumbrando a oportunidade de enriquecer e ampliar as reflexões e discussões acerca da Educação Matemática Inclusiva, propomos o projeto intitulado "Oficinas de Matemática voltadas para a educação especial na perspectiva da educação inclusiva". Destarte, as reflexões empreendidas no âmbito do projeto decorrem do seguinte princípio, ensinar matemática para que todos tenham a oportunidade de aprender em um mesmo ambiente e com atividades em comum.

Desse modo, foi realizado pelos bolsistas um levantamento de planos de aulas e de planos de aulas de Oficinas de Matemática desenvolvidas pelos acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, *campus* Toledo, em anos anteriores e aplicadas na própria UTFPR e em colégios de Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com o objetivo de adaptá-los, parcialmente ou totalmente.

Apresentaremos neste capítulo, alguns resultados de materiais produzidos em uma impressora 3D, visto que é um recurso que agrega na produção de materiais, mas com o cuidado de a utilizarmos de maneira consciente e sustentável, produzindo materiais ou peças que não podem ser confeccionados com outro material, ou pelo custo ou pela qualidade do material ou pela especificidade da peça.

Nesse contexto, na próxima seção apresentamos o que entendemos por Educação Matemática Inclusiva, na sequência discutimos o uso das Tecnologias Assistivas na produção de materiais didáticos, com uso específico de uma impressora 3D. Em seguida esclarecemos sobre o projeto Licenciando, sobre o qual esse capítulo está sendo edificado, bem como apresentamos alguns exemplos de materiais assistivos desenvolvidos. Por fim, apresentamos nossas considerações sobre o projeto e seus desdobramentos.

1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA

Compreender a Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva durante a formação inicial de professores que ensinam matemática é fundamental para os futuros professores, bem como para os docentes do curso de licenciatura para que tenham o entendimento que a Educação Inclusiva compreende:

> [...] compartilhar espaços, tarefas, profissionais, infraestrutura, objetivos formativos com todos, por todos. Entretanto, isso não significa um tratamento igualitário a todos, mas, sim, equitativo, já que alguns de nossos estudantes e professores, caso não tenham suas diferenças consideradas, não poderão sequer participar de determinadas atividades que não considerem suas características (BORGES; CYRINO; NOGUEIRA, 2021, p. 2605).

Desta forma, apresentamos alguns marcos legais importantes para a constituição da Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva. Tomamos como ponto de partida a ruptura acerca da Educação Especial, desenvolvida em escolas especializadas, que em sua maioria não ofertavam uma escolarização seriada, diferente da escolarização ofertada em escolas comuns, denominada como educação regular (NOGUEIRA, 2019).

A mudança de perspectiva da Educação Especial começa a se transformar na década de 90, a partir das discussões em âmbito mundial que visavam a promoção de uma Educação para todos. Ou seja, inicia-se uma crise de paradigmas, com a necessidade de mudanças de visão de mundo, para que um novo paradigma de conhecimento seja estabelecido, determinando novas conexões "[...] entre saberes outrora isolados e partidos e dos encontros da subjetividade humana com o cotidiano, o social, o cultural". Mantoan (2003, p. 14) ainda destaca que, "[...] para reformar a instituição, temos de reformar as mentes, mas não se pode reformar as mentes sem uma prévia reforma das instituições".

Esse movimento de ruptura e mudança de paradigma entre aquelas escolas regulares e os demais estudantes das escolas especializadas toma forma a partir da Conferência Mundial sobre Educação para Todos (CONFERÊNCIA DE JOMTIEN, 1990), realizada em Jontiem, na Tailândia, em 1990, e promovida pela UNESCO, que teve como objetivo promover a integração de alunos com necessidades educacionais especiais no ambiente escolar, visando a respeitar a diversidade. O princípio da integração foi reafirmado pela Conferência Mundial de Educação Especial, em Salamanca (DECLARAÇÃO DE SALAMANCA, 1994), na Espanha, em 1994, que tratou das "Regras Padrões sobre Equalização de Oportunidades para Pessoas com Deficiência", demandando que os Estados garantam que a educação das pessoas com deficiência faça parte integrante do sistema educacional.

Essas políticas internacionais estão incorporadas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n. 9394 de 1996, no Capítulo V, artigo 58, que define a Educação Especial como uma "modalidade de educação escolar, oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para alunos com necessidades especiais" (BRASIL, 1996). Isso estabelece o desenvolvimento da inclusão escolar.

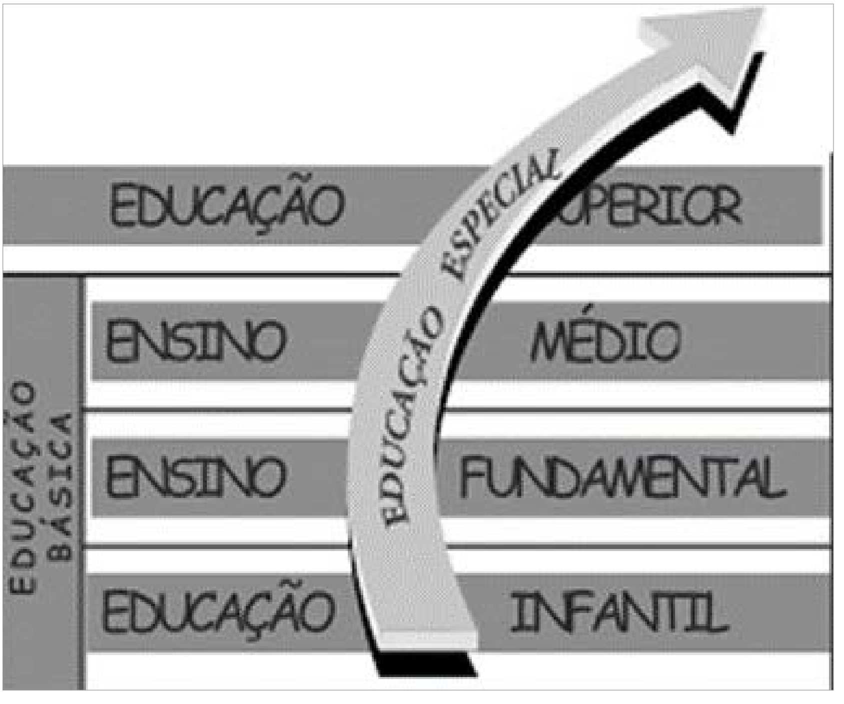
O Brasil, como signatário das políticas internacionais, reafirma o compromisso e a preocupação com o processo de inclusão, ao estabelecer por meio do Decreto n.º 3.956, em 2001, a promulgação da Convenção Interamericana para a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Pessoas com Deficiência (BRASIL, 2001b). Esse documento define o termo "deficiência", como "[...] uma restrição física, mental ou sensorial, de natureza permanente ou temporária, que limita a capacidade de exercer uma ou mais atividades essenciais da vida diária, causada ou agravada pelo ambiente econômico e social" (BLATTES, 2006, p. 212) e o termo "discriminação contra as pessoas com deficiência", como qualquer forma de:

> a) diferenciação, exclusão ou restrição baseada em deficiência, antecedente de deficiência, consequência de deficiência anterior ou percepção de deficiência presente ou passada, que tenha o efeito ou propósito de impedir ou anular o reconhecimento, gozo ou exercício por parte das pessoas portadoras de deficiência de seus direitos humanos e suas liberdades fundamentais.
>
> b) Não constitui discriminação a diferenciação ou preferência adotada pelo Estado Parte para promover a integração social ou o desenvolvimento pessoal

> dos portadores de deficiência, desde que a diferenciação ou preferência não limite em si mesma o direito à igualdade dessas pessoas e que elas não sejam obrigadas a aceitar tal diferenciação ou preferência. Nos casos em que a legislação interna preveja a declaração de interdição, quando for necessária e apropriada para o seu bem-estar, esta não constituirá discriminação (BLATTES, 2006, p. 212-2013).

Também em 2001, foi estabelecido, por meio da resolução CNE/CEB n. 2, as Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica, definindo no artigo 1.º que "a educação de alunos que apresentem necessidades educacionais especiais, na Educação Básica, em todas as suas etapas e modalidades" (BRASIL, 2001a). A Educação Especial passa a ser compreendida como transversal ao sistema educacional, ou seja, perpassa todos os níveis e modalidades de ensino conforme a figura 1.

Figura 1: Transversalidade da Educação Especial



Fonte: Blattes, 2006, p. 9.

Foi somente em 2008, com a Política Nacional de Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva (PNEE), que a Educação Especial passa a ser concebida como modalidade escolar e a ser ofertada preferencialmente na rede regular de ensino, com a finalidade de:

> [...] assegurar a inclusão escolar de alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação, orientando os sistemas de ensino para garantir: acesso ao ensino regular, com participação, aprendizagem e continuidade nos níveis mais elevados do ensino; transversalidade da modalidade de educação especial desde a educação infantil até a educação superior; oferta do atendimento educacional especializado; formação de professores para o atendimento educacional especializado e demais profissionais da educação para a inclusão; participação da família e da comunidade; acessibilidade arquitetônica, nos transportes, nos mobiliários, nas comunicações e informação; e articulação intersetorial na implementação das políticas públicas (BRASIL, 2008, p. 14).

A Educação Especial, "[...] modalidade de ensino que perpassa todos os níveis, etapas e modalidades" (BRASIL, 2008, p. 16), tem como objetivo fornecer o Atendimento Educacional Especializado (AEE) tanto nas Salas de Recurso Multifuncional (SRM), quanto nas salas comuns do ensino regular, por meio da disponibilização de serviços e de recursos do AEE, bem como, orientar alunos e professores quanto a utilização destes. As escolas especializadas são instruídas pela PNEE, para se tornarem centros de oferta do AEE, mantendo a matrícula dos alunos atendidos na escola regular inclusiva.

Retomamos assim o estudo realizado por Borges, Cyrino e Nogueira (2021), que apresenta discussões sobre a Formação Inicial de Professores que ensinam Matemática em uma perspectiva inclusiva, de modo que os "[...] cursos de licenciatura devem lidar com diversos elementos que influenciam a profissão professor, porém, nossa ênfase aqui vai para: saber Matemática, ensinar Matemática e conhecer as necessidades dos sujeitos acerca desse ensino" (BORGES; CYRINO; NOGUEIRA, 2021, p. 153).

A perspectiva de uma formação de professores capacitados para ministrar aulas nas classes comuns do ensino regular com a presença de alunos apoiados pela Educação Especial, está prevista nas políticas públicas desde 2001 com a Resolução CNE/CP nº 1/2002, por meio das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena, considerando no artigo 6.º para a construção do projeto pedagógico dos cursos de formação dos docentes, parágrafo 3.º - II - "[...] conhecimentos sobre crianças, adolescente, jovens e adultos, aí incluídas as especificidades dos alunos com necessidades educacionais especiais" (BLATTES, 2006, p. 293).

A Resolução CNE/CP n. 1/2002, estabelece também a necessidade de enriquecimento da prática profissional do professor em formação, por meio de tecnologias da informação. Tal necessidade é reafirmada em 2019, com a Resolução CNE/CP n.º 2, com a definição das novas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores, ao estabelecer as competências gerais docentes "2. Pesquisar, investigar, refletir, realizar a análise crítica, usar a criatividade e buscar soluções tecnológicas para selecionar, organizar e planejar práticas pedagógicas desafiadoras, coerentes e significativas" (BRASIL, 2019, p. 13).

Assim, além das reflexões acerca do ensino de matemática em uma perspectiva inclusiva, buscamos em nossas discussões abordar a utilização das tecnologias para o acesso ao conhecimento, por meio da construção de materiais didáticos e assim enriquecendo os Planos de Aula das oficinas que são adaptadas. Na próxima seção apresentamos os recursos utilizados para essa etapa do desenvolvimento do projeto.

2 TECNOLOGIAS ASSISTIVAS (TAs) E O USO DE IMPRESSORAS 3D

Historicamente, o termo Tecnologia Assistiva era conhecido como Ajuda Técnica pela Secretaria Especial dos Direitos Humanos e, com o tempo e avanço das pesquisas, o termo Ajuda Técnica mostrou-se insuficiente para designar a ampla gama de significados que o termo poderia expressar.

Nesse contexto, em 2006, o Comitê de Ajudas Técnicas, vinculado à Secretaria Especial dos Direitos Humanos, definiu Tecnologias Assistivas (TAs) como "[...] fruto da aplicação de avanços tecnológicos em áreas já estabelecidas [...]", sendo de "[...]" domínio de profissionais de várias áreas do conhecimento, que interagem para restaurar a função humana". Estas dizem respeito ainda "[...] à pesquisa, fabricação, uso de equipamentos, recursos ou estratégias utilizadas para potencializar as habilidades funcionais das pessoas com deficiência" (BRASIL, 2009, p. 11).

Destacamos que o desenvolvimento de recursos assistivos tem promovido a valorização e inclusão de pessoas ora excluídas por alguma necessidade específica. Essa necessidade específica não se limita apenas aos de ordem física, mas abrange ainda aspectos biológicos, psicológicos e neurológicos.

Ainda de acordo com o Comitê de Ajudas Técnicas, os produtos oriundos das TAs, pela ISO 9999, são classificados em 11 grandes classes: 1) Tratamento médico pessoal, 2) Treinamento de habilidades, 3) Órteses e próteses, 4) Proteção e cuidados pessoais, 5) Mobilidade pessoal, 6) Cuidados com o lar,

7) Mobiliário e adaptações para residências e outras edificações, 8) Comunicação e informação, 9) Manuseio de objetos e equipamentos, 10) Melhorias ambientais, ferramentas e máquinas e, 11) lazer (BRASIL, 2009).

Pela *Horizontal European Activities in Rehabilitation Technology (HEART)*, órgão vinculado à União Europeia, há três grandes áreas das TAs: componentes técnicos, componentes humanos e componentes socioeconômicos. Nos componentes técnicos existem quatro áreas: comunicação, mobilidade, manipulação e orientação (BRASIL, 2009).

Uma última classificação encontrada advém do Instituto Nacional de Pesquisas em Deficiências e Reabilitação, da Secretaria de Educação Especial, vinculada ao Departamento de Educação dos Estados Unidos. Nesse sistema de classificação eles diferem dez componentes: elementos arquitetônicos, elementos sensoriais, computadores, controles, vida independente, mobilidade, órteses/próteses, recreação/lazer/esportes, móveis adaptados/mobiliários e serviços (BRASIL, 2009).

Diante dessas inúmeras classificações, vamos entender que as Tecnologias Assistivas têm dois grandes grupos de classificação, um vinculado aos recursos e outro aos serviços. Assim, os recursos são itens, equipamentos ou partes deles, produtos ou sistemas fabricados utilizados para melhorar as capacidades funcionais das pessoas com deficiência. Os serviços, por outro lado, são aqueles que ajudam diretamente uma pessoa com deficiência escolher os melhores recursos assistivos (RODRIGUES, 2019).

No âmbito da produção de recursos assistivos, encontramos algumas ferramentas que permitem desenvolver tais materiais, dentre elas, citamos as impressoras 3D. Tais impressoras se caracterizam como importantes meios para melhorar o ensino e a aprendizagem dos estudantes, uma vez que, permitem que os estudantes e professores construam e explorem materiais pedagógicos.

Nesse contexto, a impressora 3D pode ser inserida no movimento *maker*, o qual utiliza como filosofia o *hands-on* (mão na massa) e o *do it yourself* (faça você mesmo). Esses movimentos incentivam a criatividade dos estudantes durante os momentos de aprendizagem (SANTOS; ANDRADE, 2020).

A impressora 3D utilizada para a produção dos materiais didáticos aqui apresentados é uma *Creality Ender-3 V2* (Figura 2), que permite a impressão de materiais termoplásticos biodegradáveis, como por exemplo, o ácido poliláctico (PLA), fabricado a partir da dextrose, um tipo de açúcar.

Figura 2: Creality Ender-3 V2

Fonte: Creality[1]

O movimento *maker* e o construcionismo de Papert (1993, 1994) são duas abordagens educacionais que têm ganhado destaque nas últimas décadas. O movimento *maker* valoriza a ideia de que as pessoas são capazes de criar, construir e consertar objetos por conta própria. Através do uso de tecnologias como impressoras 3D, cortadoras a laser e microcontroladores, os *makers* são capazes de materializar suas ideias e projetos de forma tangível. Esse movimento encoraja a criatividade, o pensamento crítico e a resolução de problemas, proporcionando uma experiência prática e significativa de aprendizagem.

1 Disponível em: https://www.creality3dofficial.com/. Acesso em: 30 maio 2023.

O construcionismo, por sua vez, é uma teoria desenvolvida por Seymour Papert, um dos pioneiros da inteligência artificial e da educação. Segundo Papert (1993, 1994), o aprendizado ocorre de forma mais eficaz quando os alunos têm a oportunidade de construir e manipular objetos físicos e, assim, construir o seu próprio conhecimento. Ele defendia a ideia de que as crianças aprendem melhor quando estão envolvidas ativamente em projetos e atividades que despertam seu interesse e curiosidade. Papert também acreditava no potencial das tecnologias como ferramentas para o aprendizado, defendendo o uso de computadores e programação como forma de empoderar os alunos a se tornarem criadores e não apenas consumidores de conteúdo.

O movimento *maker* e o construcionismo de Seymour Papert compartilham uma visão semelhante em relação ao papel do aluno como protagonista de seu próprio aprendizado. Ambos enfatizam a importância da experiência prática, do trabalho colaborativo e da conexão entre o mundo real e o ambiente educacional. Ao proporcionar oportunidades para os estudantes criarem, experimentarem e refletirem sobre suas criações, essas abordagens buscam desenvolver habilidades essenciais para o século XXI, como pensamento crítico, resolução de problemas, criatividade e colaboração. Além disso, promovem uma mentalidade de aprendizado contínuo e uma abordagem construtivista, na qual o conhecimento é construído ativamente pelos alunos, em vez de ser passivamente transmitido pelos professores.

Essas características são essenciais para os futuros professores de matemática, que podem aliar os conhecimentos específicos de matemática com os conhecimentos pedagógicos para a produção de materiais didáticos inclusivos. Nesse contexto, na próxima seção apresentamos o projeto Licenciando, que tem como uma das propostas, articular a utilização de Tecnologias Assistivas com a Educação Matemática Inclusiva.

3 O PROJETO LICENCIANDO

O projeto Licenciando teve seu início em agosto de 2022, por meio do Edital n. 43/2022 PROGRAD, voltado para todos os cursos de Licenciatura da UTFPR e tem por objetivos "[...] desenvolver ações sobre a prática pedagógica dos licenciandos, no âmbito das escolas da educação básica"; "[...] propiciar a produção de conhecimento sobre a prática pedagógica dos licenciandos, no âmbito da UTFPR" e "[...] fomentar a Política Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná para a Formação Inicial e Continuada de Professores para a Educação Básica (Resolução COGEP/UTFPR n. 122, de 29 de novembro de 2021), através da melhoria da qualidade da formação dos licenciandos e da articulação com a educação básica" (UTFPR, 2022, p. 1).

Por meio desse edital, são disponibilizados recursos para os estudantes (quatro bolsas) e vagas para estudantes não bolsistas, auxiliando no envolvimento destes em ações de extensão propostas pelo curso e na sua permanência na licenciatura. O projeto Licenciando proposto pelo curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Toledo tem como objetivo catalogar e organizar os planos das oficinas já existentes no curso de Licenciatura; selecionar algumas destas, renovar e ou adaptar para a Educação Especial e produzir materiais didáticos, mais especificamente com o uso da impressora 3D. Além das bolsas para os estudantes, um auxílio pesquisador foi disponibilizado para aquisição de materiais, que em nosso caso, foi destinado para a compra de filamentos para a impressora 3D.

Desse modo, com os objetivos propostos no nosso projeto, buscamos minimizar a desarticulação entre as disciplinas do curso e a inclusão. As oficinas de Matemática desenvolvidas pelo nosso curso sempre foram resultado das disciplinas de Estágio Supervisionado, que envolvem e envolveram atividades vivenciadas também durante as disciplinas de Tecnologias no Ensino de Matemática, de Laboratório de Ensino de Matemática e da Educação Matemática Inclusiva.

Neste sentido, o projeto licenciando inserido no curso de Licenciatura em Matemática, surge também para promover essa articulação transversal, que vai de encontro às considerações dos autores:

> [...] a maioria das disciplinas que trazem aspectos que possibilitam a discussão da inclusão, ainda que isolada e não transversal, está sob a responsabilidade de outros colegiados/departamentos que não os de Matemática, o que potencializa um tratamento da temática inclusão desarticulada dos conhecimentos matemáticos. Algumas disciplinas que teriam potencial para discutir a inclusão não o oportunizam em suas ementas e/ou bibliografias, como é o caso do Laboratório de Ensino de Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática, Políticas Públicas, dentre outras. Nessas disciplinas, identificamos a ausência de discussões possíveis e pertinentes, como: as tecnologias assistivas, a produção de recursos pedagógicos pensando em estudantes com deficiência, as políticas públicas voltadas para as pessoas com deficiência no âmbito escolar etc. (BORGES; CYRINO; NOGUEIRA, 2021, p. 2607).

Ou seja, promover discussões pertinentes voltadas para a Educação Especial na perspectiva inclusiva são ações possíveis e realizadas dentro do curso e para além, por meio de projetos de extensão, em específico, por meio do projeto Licenciando. Desse modo, concordamos com os autores ao considerarmos que, "[...] os cursos de formação inicial em Matemática precisam considerar a inclusão dos sujeitos com deficiência, para além dos aspectos teóricos, bem como tratar a temática inclusão de maneira transversal, promovendo uma cultura inclusiva (BORGES; CYRINO; NOGUEIRA, 2020, p. 134).

Com o intuito de promovermos uma cultura inclusiva entre nossos estudantes durante a sua formação inicial, apresentaremos algumas atividades desenvolvidas ao longo do projeto.

4 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROJETO

Em Casarotto *et al*. (2023), os autores entendem como material didático algo que pode ser manipulado e como alternativa para auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos, por meio do tocar, sentir, movimentar. A partir dessas considerações, apresentam uma das atividades desenvolvidas durante os primeiros quatro meses de projeto. Para se chegar até a "versão final" do material impresso na 3D, alguns percursos foram seguidos.

De início, foi realizada a catalogação de 82 planos de aulas (do ano de 2013 – segundo semestre, ao ano de 2022, primeiro semestre), esses foram elaborados e desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura pelos acadêmicos matriculados nas disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2, 3 e 4. Para a elaboração desses planos, os graduandos utilizaram e utilizam as contribuições e ou experiências vivenciadas nas disciplinas já cursadas durante o curso, dentre elas, destacamos Tecnologias no Ensino de Matemática, Laboratório de Ensino de Matemática e Educação para a Inclusão.

Os planos de aulas foram organizados em uma pasta e compartilhados com os bolsistas do licenciando, de modo que, ao padronizarmos os códigos, eles pudessem realizar a catalogação. Do total dos planos de aulas — incluindo-se os planos de aulas das oficinas, 35 foram codificados como Ensino Fundamental e 47 Ensino Médio.

Em simultâneo a esse trabalho de catalogação, realizamos reuniões para a discussão de artigos pertinentes à execução do projeto. Ao término da catalogação, os licenciandos escolheram dois planos de aulas, de suas preferências, para realizarem as adaptações em um dos planos. Em reuniões, apresentaram-nos os planos e explicaram o porquê das escolhas. Das conversas, definimos qual proposta seria interessante para o momento e tempo de projeto para realizarmos as adaptações.

É preciso ressaltar que, apesar de utilizarmos o termo adaptação de materiais, nosso olhar para os Planos de Aula, buscam uma reestruturação de modo que todos os estudantes, independentemente de sua necessidade, possam participar ativamente. Ou seja, corroboramos com a perspectiva de Fernandes (2017, p. 86) ao apontar que, quando pensamos em adaptar, podemos incorrer em uma integração dos alunos apoiados pela Educação Especial, em que eles "[...] deveriam usar os recursos disponibilizados para atenderem suas limitações (o que inclui as ferramentas adaptadas e as tecnologias assistivas) e como "super-heróis" realizarem as tarefas para acompanhar os seus pares".

Em oposição a esse entendimento, a autora propõe a utilização do termo construção, ou seja, pensarmos na:

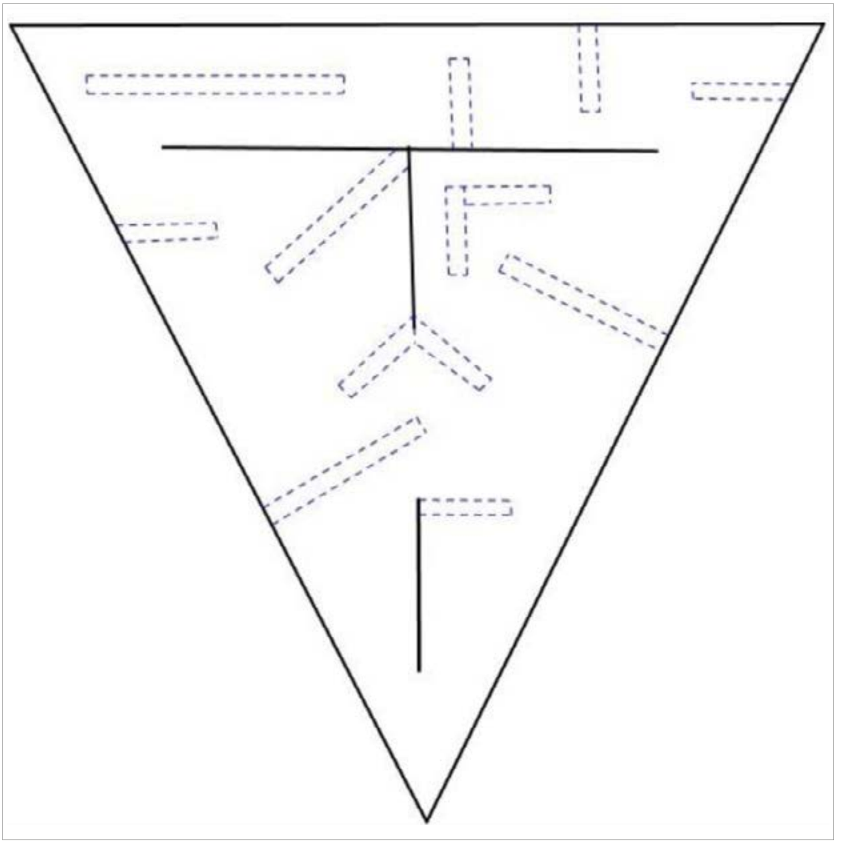
> [...] elaboração de um contexto, no qual os aprendizes "diferentes" possam vivenciar novas trajetórias rumo ao conhecimento, que favoreçam o compartilhamento e a negociação de significados dos objetos matemáticos, no nosso caso. Esses contextos devem ainda permitir que os aprendizes desenvolvam a autonomia e o domínio do seu trabalho com a matemática escolar. Desse modo, a matemática pode ser explorada como um espaço compartilhado, modificando a forma como essa disciplina é percebida, ensinada e aprendida (FERNANDES, 2017, p. 86).

Seguindo esta concepção, buscamos pela construção de materiais que sejam utilizados em um mesmo contexto para todos os estudantes, mas que tenham as informações acessíveis às suas necessidades e que possam ser utilizados por todos em sala de aula.

Como se trata de um projeto, tivemos entradas e saídas de bolsistas durante os quatro meses, e dos quatro planos escolhidos (uma escolha de cada bolsista), apenas dois foram finalizados, no sentido de termos os materiais impressos na impressora 3D.

Em Casarotto *et al.*(2023), os autores realizaram a adaptação de uma atividade que envolvia o ensino de escala, ângulos e operações fundamentais. O problema era realizar a troca das paredes de um museu para que o custo da instalação de câmeras fosse o menor possível e atendesse a maior área possível, conforme pode ser visto na figura 3.

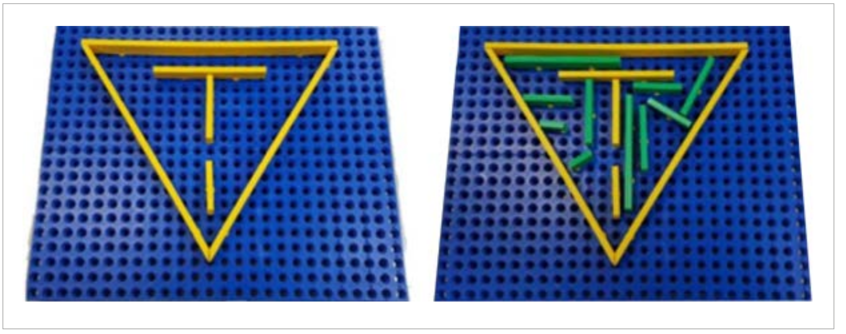
Figura 3: Atividade Um dia no Museu



Fonte: Adaptado de Dante (2013).

Essa atividade, inicialmente pensada (pelos autores originais da oficina) para ser realizada em papel, foi adaptada para ser utilizada com o Multiplano. Nesse contexto, foi realizada a produção de peças (figura 4) que pudessem permitir ao estudante com deficiência visual uma experiência tátil apurada.

Figura 4: Peças do Multiplano Construídas



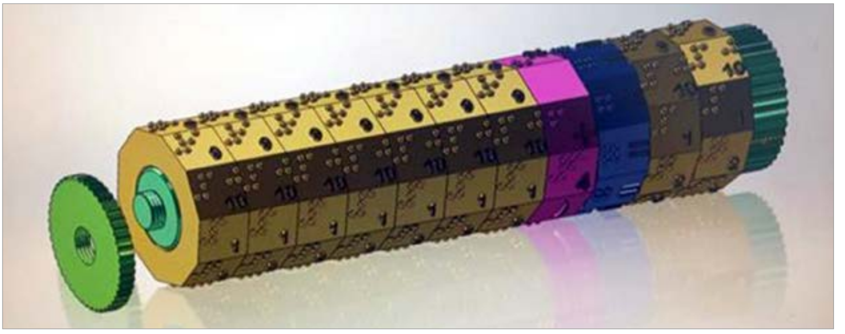
Fonte: Casarotto *et. al*, 2023.

As barras foram produzidas nas cores amarela e verde. As primeiras sendo as paredes fixas e as últimas, as removíveis. Fizemos em cores diferentes para que os professores possam se organizar de forma adequada e os estudantes videntes possam perceber as diferenças. Quanto a diferenciação das peças fixas e móveis para alunos cegos, após a produção do material, identificamos a necessidade de mais uma adequação no material, a discriminação entre as peças fixas e as peças móveis. Para isso, pensamos em tornar as peças fixas ásperas e, as peças móveis, lisas, possibilitando assim a fácil identificação.

Destacamos outro material didático que foi desenvolvido por um dos alunos, proposto a partir da oficina intitulada "O problema dos Quatro Quatros" presente no livro de Malba Tahan, "O Homem que Calculava". O problema consiste em escrever com quatro quatros e as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) uma expressão matemática que representa cada número de 0 a 10. Assim, para a atividade os estudantes teriam que escrever soluções para números de 0 a 10 em uma tabela seguindo uma regra: utilizar necessariamente os quatro quatros nas operações básicas e nenhum outro algarismo.

A adaptação da oficina partiu da construção de um material, denominado pelos autores como *Spinner* adaptado. O projeto foi desenvolvido no programa *SolidWorks*, contém 11 peças que giram em torno de uma base cilíndrica, com cores diferentes, sendo em amarelo as peças com os números de 1 a 10, em roxo a peça com as quatro operações básicas, os parênteses e o número "4" e por fim a azul, sendo o sinal de igualdade "=". Conforme o projeto apresentado na figura 5:

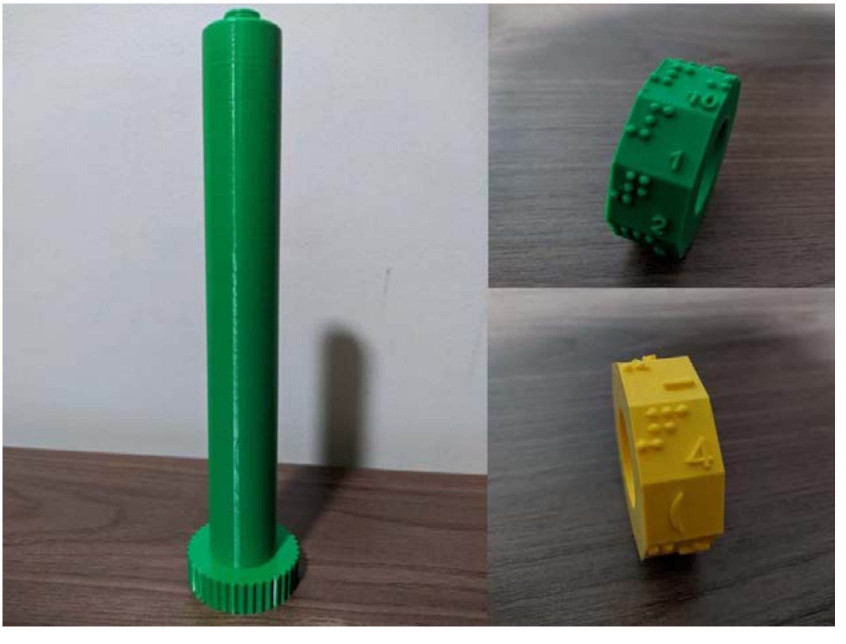
Figura 5: Projeto do *Spinner* adaptado no *SolidWorks*



Fonte: Da pesquisa (2023).

As adaptações realizadas para esse material buscam estimular os estudantes a construir, por meio da sua utilização, diferentes estratégias para a resolução do "problema dos quatro quatros", estimulando cada vez mais o entendimento por parte dos estudantes, de que a matemática pode ser aprendida por todos. Apresentamos na figura 6 uma prévia das peças já impressas com a impressora *3D Creality Ender 3*.

Figura 6: Projeto do Spinner adaptado no *SolidWorks*



Fonte:Da pesquisa (2023).

É importante ressaltar que o material ainda passará por teste, momento em que será utilizado por estudantes do Ensino Fundamental que poderão indicar e contribuir para possíveis adequações e melhorias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vislumbramos a importância dos cursos de formação inicial e continuada de professores abordarem a temática da inclusão de forma ampla, promovendo a reflexão sobre as práticas pedagógicas inclusivas, a sensibilização para a diversidade e a valorização da igualdade de oportunidades educacionais. Os futuros e atuais professores precisam receber suporte e orientação adequados para desenvolver as competências necessárias para atender a todos os alunos, independentemente de suas habilidades ou deficiências.

No entanto, a formação em educação inclusiva ainda tem sido pouco abordada nos cursos de formação inicial ou continuada de professores. É necessário avançar nesse sentido, promovendo a inclusão educacional como um tema transversal em todas as disciplinas, e não tratá-la em paralelo ou menos importante em outros departamentos ou colegiados.

Uma iniciativa positiva nesse sentido foi a proposição e o desenvolvimento do projeto neste texto abordado, visando ao desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas voltadas para a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática em perspectiva inclusiva.

Dentro desse projeto, os bolsistas realizaram um levantamento de planos de aulas desenvolvidos anteriormente e os adaptaram para atender às necessidades dos estudantes com deficiência na perspectiva da educação inclusiva. Um dos resultados foi a produção de materiais didáticos adaptados, utilizando impressoras 3D como recurso.

Durante a execução do projeto, também enfatizamos o uso das tecnologias assistivas e o conhecimento acerca de suas potencialidades para o ensino e aprendizagem, destacando a importância da articulação entre as disciplinas do curso, principalmente Laboratório do Ensino de Matemática, Tecnologias do Ensino de Matemática e Educação Matemática Inclusiva.

O processo de estudo incluiu a participação em cursos e a familiarização com softwares de modelagem 3D, além do aprendizado sobre o uso da impressora 3D para a produção dos materiais didáticos. Essas experiências têm contribuído tanto para a formação inicial dos bolsistas do Licenciando como para a formação continuada dos docentes responsáveis pelo projeto.

Durante a execução do projeto, surgiram diversos desafios, desde a escolha do plano da oficina a ser adaptada até a construção do material, impressão e aplicabilidade. É importante ressaltar que o projeto teve continuidade por meio do Edital 61/2022 PROGRAD, com a ampliação do tempo de execução para oito meses (de abril de 2023 a novembro de 2023), mantendo a proposta original.

Todos esses processos são fundamentais para a formação do futuro professor, que precisa estar aberto para lidar com novas situações, refletir e tomar decisões com autonomia, iniciativa e criatividade, experimentando e utilizando estratégias para o ensino e aprendizagem da matemática, em uma perspectiva de educação inclusiva.

Em suma, é necessário promover a inclusão educacional como um tema transversal em todos os cursos de formação de professores, garantindo que os futuros educadores construam os conhecimentos e as habilidades necessárias para atender às necessidades de todos os alunos. A implementação de projetos e o uso de recursos tecnológicos, como a impressora 3D, podem contribuir para a criação de materiais adaptados e o desenvolvimento de práticas inclusivas. No entanto, é importante considerar a sustentabilidade e a viabilidade desses recursos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à UTFPR, por meio do EDITAL 43/2022 - PROGRAD, pelo auxílio financeiro para a implementação do Projeto Licenciando intitulado Oficinas de Matemática voltadas para a Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva.

REFERÊNCIAS

BLATTES, R. L. (org.). **Direito à educação**: subsídios para a gestão dos sistemas educacionais: orientações gerais e marcos legais. 2. ed. Brasília: MEC, 2006.

BORGES, F. A.; CYRINO, M. C. de C. T.; NOGUEIRA, C. M. I. A formação do futuro professor de Matemática para a atuação com estudantes com deficiência: uma análise a partir de projetos pedagógicos de cursos. **Boletim Gepem**, [*S.l.*], n. 76, p. 134-155, jan.-jun. 2020. Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/515. Acesso em: 29 maio 2023.

BORGES, F. A.; CYRINO, M. C. de C. T.; NOGUEIRA, C. M. I. Aspectos para a reflexão em formações iniciais de professores de Matemática pensando na inclusão. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8.,

2021. **Anais [...]**. Uberlândia: UFU, 2021. p. 2.602-2.616. Disponível em: https://encurtador.com.br/vzFU5. Acesso em: 29 maio 2023.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. Ministério da Educação. Lei n. 9394/96. **Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, 23 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 15 jun. 2023.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. Ministério da Educação. **Diretrizes nacionais para a educação especial na educação básica**. Brasília: SEESP, 2001a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/diretrizes.pdf. Acesso em: 15 jun. 2023.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. **Decreto n. 3.956**, de 8 de outubro de 2001. **Promulga a Convenção Interamericana para a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Pessoas Portadoras de Deficiência**. 2001b. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/2001/d3956.htm. Acesso em: 15 jun. 2023.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. **Política nacional de educação especial na perspectiva da educação inclusiva**. Brasília: MEC, 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/politicaeducespecial.pdf. Acesso em: 15 jun. 2023.

BRASIL. Presidência da República. Secretaria Especial dos Direitos Humanos. Ministério da Educação. Subsecretaria Nacional de Promoção dos Direitos da Pessoa com Deficiência. Comitê de Ajudas Técnicas. **Tecnologia Assistiva.** Brasília: CORDE, 2009. 138 p. Disponível em: http://www.galvaofilho.net/livro-tecnologia-assistiva_CAT.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução n. 1, de 2 de julho de 2019. Altera o artigo 22 da Resolução CNE/CP n. 2, de 1. de julho de 2015. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, 2 jul. 2019. p. 35. Disponível em: https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/pdf/CNE_RES_CNECPN12019.pdf. Acesso em: 15 jun. 2023.

CASAROTTO, V. F.; ANDRADE, V. L.; PIN, A. K.; MERLI, R. F. Criação deMateriais Didáticos Utilizando a Impressora 3D para a Educação Matemática Inclusiva. *In*: SEMANA DA MATEMÁTICA DA UTFPR TOLEDO, 10., 2023. Toledo. **Anais [...]**.

Toledo: UTFPR, 2023. Disponível em: http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/X_semat/Documentos/Anais_X_Semat_2023.pdf. Acesso em: 30 ago. 2023.

CINTRA, V. P. **Trabalho com projetos na formação inicial de professores de matemática na perspectiva da educação inclusiva**. 2014. 137 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/123985. Acesso em: 31 maio 2023.

DANTE, L. R. **Matemática Projeto Teláris**. 1. ed. São Paulo: Ática 2013.

DECLARAÇÃO DE SALAMANCA. **Sobre Princípios, Políticas e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais.** Salamanca (Espanha): [*s.n.*], 1994.

FERNANDES, S. H. A. A. Educação Matemática inclusiva: adaptação x construção. **Revista Educação Inclusiva - REIN**, Campina Grande, v. 01, n. 01, 2017. Disponível em: https://encurtador.com.br/mnACU. Acesso em: 31 maio 2023.

MANTOAN, M. T. E. **Inclusão Escolar:** O que é? Por quê? Como fazer? São Paulo: Moderna, 2003.

NOGUEIRA, C. M. I. Educação Matemática e Educação Especial na perspectiva inclusiva: Educação Matemática Inclusiva? *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 13., 2019. Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá: UNEMAT, 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/download/36 55/2013. Acesso em: 15 jun. 2023.

PAPERT, S. A. **Mindstorms:** children, computers, and powerful ideas. 2. ed. [*S.l.*]: Basic Books, 1993.

PAPERT, S. A. **The Children's Machine:** rethinking school in the age of the computer. [*S.l.*]: Basic Books, 1994.

RODRIGUES, L. Tecnologia Assistiva: o que é e como usar na escola sem saber informática. **Instituto Itard.** [*S.l.*: *s.n.*], 2019. Curso de Educação Especial. Disponível em: https://institutoitard.com.br/tecnologia-assistiva-o-que-e-e-como-usar-na-escola-sem- saber-informatica/. Acesso em: 29 maio 2023.

SANTOS, J. T. G.; ANDRADE, A. F. Impressão 3D como Recurso para o Desenvolvimento de Material Didático: associando a cultura maker à resolução de problemas. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 18, n. 1, 2020. DOI: 10.22456/1679-1916.106014. Disponível em: https://www.seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/106014. Acesso em: 29 maio 2023.

UNITED NATIONS INTERNATIONAL CHILDREN'S EMERGENCY FUND (UNICEF). **Declaração Mundial sobre Educação para Todos e plano de ação para satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem**. Jomtien (Tailândia): UNESCO, 2000. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/declaracao-mundial-sobre- educacao-para-todos-conferencia-de-jomtien-1990. Acesso em: 30 maio 2023.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ (UTFPR). **Edital de Seleção de Propostas de Projeto de Incentivo à Prática Pedagógica aos Cursos de Licenciatura da UTFPR - Licenciando.** Edital 43/2022 PROGRAD. Curitiba: 2022. Disponível em: https://sei.utfpr.edu.br/sei/publicacoes/controlador_publicacoes.php?acao=publicacao_visualizar&id_documento=3086438&id_orgao_publicacao=0. Acesso em: 30 maio 2023.

CAPÍTULO 5

EXPLORANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A ARTE COMO RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Daiane Aparecida Pêgo: daiapegobutcke@gmail.com
Bruno Gabriel Miró: bruno_karate59@hotmail.com
Rodolfo Eduardo Vertuan: rodolfovertuan@utfpr.edu.br

Neste capítulo, abordaremos duas propostas de atividades desenvolvidas no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR de Toledo, envolvendo a utilização da História da Matemática e da Arte como recursos didáticos. Essas propostas surgiram a partir dos resultados de dois trabalhos de conclusão de curso (Monografia) orientados pelo terceiro autor deste capítulo e desenvolvidos pelos dois primeiros autores, com o objetivo de estimular a compreensão e a reflexão dos estudantes em relação a diferentes aspectos matemáticos.

O trabalho de conclusão de curso de Bruno Gabriel Miró, de título *Sistemas Numéricos: uma proposta utilizando UEPS e História da Matemática*, apresenta propostas de abordagem de conteúdos matemáticos tendo como provocação tópicos de História da Matemática. Neste texto, utilizamos a situação “Explorando Sistemas Numéricos de Bases Diversas”, que associa a História da Matemática à constituição e compreensão do nosso Sistema de Numeração Decimal (SND).

Também com a intenção de abarcar o interesse dos estudantes e de possibilitar discussões acerca de temas como proporção, teorema das 4 cores e geometria plana, é que o trabalho de conclusão de curso intitulado *"O Abraço" de Romero Britto: um olhar artístico para a Matemática um olhar matemático para a Arte* foi desenvolvido por Daiane Aparecida Pêgo. Neste estudo, a autora apresenta propostas de atividades utilizando a obra O Abraço do referido artista, destacando a importância de associar atividades de Arte e Matemática para realizar problemas em que conhecimento de uma área e outra são combinados e podem contribuir para o interesse e engajamento dos estudantes. Neste capítulo trazemos o "desafio de colorir um desenho".

1 EXPLORANDO SISTEMAS NUMÉRICOS DE BASES DIVERSAS

Uma possibilidade interessante de utilização da História da Matemática em sala de aula é o trabalho com a formação de sistemas numéricos de diferentes bases. Essa abordagem contribui para a compreensão dos estudantes sobre como os sistemas numéricos das antigas civilizações foram constituídos ao longo do tempo. A proposta visa promover reflexões acerca da construção de diferentes sistemas numéricos, utilizando um material potencialmente significativo para os alunos.

No início da proposta, convidamos os alunos a questionarem o sistema de numeração decimal, que utiliza dez símbolos para representar qualquer quantidade. A partir dessa provocação inicial, exploramos os sistemas numéricos de diferentes civilizações e como eles foram desenvolvidos ao longo da história. Convidamos os estudantes a criar seus próprios "sistemas numéricos" com bases distintas, utilizando símbolos conhecidos por eles. Essa atividade pode ser adaptada para diferentes contextos e turmas, conforme os objetivos do professor.

2 A MATEMÁTICA E O DESAFIO DE COLORIR UM DESENHO

Nossa segunda proposta envolve a obra de Romero Britto, artista conhecido por suas obras vibrantes e cheias de formas, linhas e cores. A intenção é desafiar os estudantes a colorirem uma obra de Britto, utilizando uma quantidade limitada de cores, sem que espaços vizinhos tenham a mesma cor. Para embasar essa atividade, recorremos ao teorema das Quatro Cores, um resultado matemático que afirma ser possível colorir qualquer mapa utilizando no máximo quatro cores, desde que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Ao aplicar o teorema das Quatro Cores à pintura de uma obra de Romero Britto, como "O Abraço", questionamos os alunos sobre como eles poderiam utilizar apenas quatro cores para colorir o desenho sem repetir cores em espaços vizinhos. Essa atividade desafiadora proporciona uma intersecção entre a matemática e a arte, incentivando os estudantes a aplicarem conceitos matemáticos em um contexto prático e criativo.

Por meio dessas duas propostas, buscamos explorar o potencial da História da Matemática e da arte como recursos didáticos, incentivando o desenvolvimento de habilidades matemáticas, reflexões críticas e criatividade nos estudantes.

3 PROPOSTAS

3.1 SISTEMAS NUMÉRICOS DE BASES DIVERSAS

Considerando que os alunos do 1.° ano do Ensino Médio já conhecem os conjuntos numéricos e retomam esse conteúdo neste nível de ensino, a proposta da sequência é utilizar um material potencialmente significativo, como instrumento para que os alunos compreendam a construção de representações para sistemas de diferentes bases e diferenciem, progressivamente, essas representações, da utilizada no Sistema de Numeração Decimal (SND).

3.1.1 Provocação Inicial

“Vocês já pararam para pensar que o nosso sistema de numeração decimal possui dez símbolos, denominados algarismos, com os quais conseguimos escrever qualquer número e representar qualquer quantidade? Já pararam para pensar se poderia ser diferente? Com outros símbolos? Com outras ‘regras’?”

Os sistemas numéricos de diferentes civilizações foram criados para representar quantidades e suprir as diferentes necessidades de suas sociedades, e desenvolveram-se por centenas de anos. Possibilidades de uso da Matemática pelas diferentes civilizações: cálculo territorial, comercial, construção civil, jogos de azar etc. Existem vários sistemas numéricos e todos foram se transformando com o passar dos anos, porém, o mais famoso é o sistema Indo-arábico, sistema utilizado hoje em dia. Pensando sobre quantidades, números e sistemas, é possível questionar os estudantes sobre como foi possível às civilizações criarem os seus próprios sistemas e, a partir daí, provocar os alunos: "Vamos juntos criar 'sistemas numéricos' com diferentes bases, utilizando símbolos já conhecidos por nós?"

3.1.2 Situação-problema introdutória

Nesta etapa, sugere-se ao professor propor o início do preenchimento de uma tabela que pode ter sido entregue previamente aos estudantes. Acreditamos que, no início, os alunos poderão ficar um pouco perdidos, pois o intuito da atividade é pensar no agrupamento de símbolos para representar quantidades em sistemas numéricos para os quais só existiriam dois símbolos (0 e 1), três símbolos (0, 1 e 2), quatro símbolos (0, 1, 2 e 3) e assim sucessivamente.

A confusão pode se dar no sentido de os alunos confundirem a representação criada para uma determinada quantidade de bolinhas com o valor a que a representação significaria no sistema de numeração decimal.

Figura 1: Tabela Introdutória

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	...
0,1	1	10	11	100	101			
0,1,2	1	2	10	11				
0,1,2,3								

Fonte: O autor, s.d.

A confusão a que nos referimos pode ser vista logo na primeira linha, segunda coluna, para a quantidade ●●, que está representado pelo símbolo "10". Os estudantes podem questionar o porquê de o "10" representar a referida quantidade, dada a confusão que podem fazer ao comparar a representação com o que ela representa no sistema de numeração decimal: ●●●●●●●●●●.

Neste contexto, é importante explicar que, ao supor que 0 e 1 sejam os únicos símbolos que existem para representar as quantidades, toda e qualquer quantidade só pode ser formada pela combinação desses símbolos. Mas percebam: cada linha trata de um "sistema" numérico de base diferente, com mais opções de símbolos, o que leva aos resultados apresentados na próxima figura.

Figura 2: Tabela Introdutória preenchida

	•	••	•••	••••	•••••	••••••	•••••••
0,1	1	10	11	100	101	110	111
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13

Fonte: O autor, s.d.

Preenchidas estas primeiras linhas do quadro, cabe ao professor realizar um diálogo sobre o que foi construído até então e sistematizar as principais ideias. No que tange à linha com apenas três símbolos, 0, 1 e 2, por exemplo, quantidades maiores ficariam assim representadas:

Figura 3 - Tabela do Sistema na linha 2

	•	••	•••	••••	•••••	••••••	•••••••	••••••••	•••••••••	••••••••••
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101
	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••
0,1,2	102	110	111	112	120	121	122	200	201	202
	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••
0,1,2	210	211	212	220	221	222	1000	1001	1002	1010

Fonte: O autor, s.d.

E assim sucessivamente, representando mais quantidades, levando os alunos a compreenderem, desse modo, a seguinte situação: por mais que cada sistema numérico possuísse símbolos diferentes, todos desejavam representar quantidades e registrar ideias, tornando isso algo em comum entre eles.

3.1.3 Ampliando as discussões

Considerando as discussões iniciais, sugerimos que os professores proponham a continuidade da atividade para a representação das mesmas quantidades, com uma coleção maior de símbolos para isso, conforme as linhas de 4 a 11 do quadro.

Figura 4: Tabela mais complexa

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
0,1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22
0,1,2,3,4										
0,1,2,3,4,5										
0,1,2,3,4,5,6										
0,1,2,3,4,5,6,7										
0,1,2,3,4,5,6,7,8										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,#										

Fonte: O autor, s.d.

Neste caso há um nível maior de dificuldade no preenchimento, já que há momentos em que os alunos precisam trabalhar com sistemas para os quais existem mais de dez símbolos para lidar. Logo, é possível que surjam dúvidas quanto a inserção dos símbolos * e #: como proceder?

É importante que o professor explique que o desafio de lidar com mais de dez símbolos tem como intenção levá-los a refletir sobre um sistema com símbolos para além dos dez a que estão habituados. Neste contexto, na continuidade das linhas vamos ter algo do tipo ..., 109, 10*, 10#, 110, ..., sendo estas as representações de quantidades, conforme a figura seguinte:

Figura 5: Tabela mais complexa preenchida

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●●●	
0,1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	...
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	...
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	...
0,1,2,3,4	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	...
0,1,2,3,4,5	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	...
0,1,2,3,4,5,6	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15	...
0,1,2,3,4,5,6,7	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	10	11	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	#	10	...

Fonte: O autor, s.d.

Com base no preenchimento total da tabela, observe que não conseguimos avançar para números como 10* e 10#, devido às várias combinações possíveis até chegarmos neles, mas é importante problematizar esse tipo de situação com os estudantes. Aliás, uma pergunta que poderia ser investigada é: que quantidade poderia representar a escrita 10*?

Sugestões adicionais: Sugerimos ao professor que leve papel cartolina ou papel Craft para a turma, de modo que, separados em grupos, os estudantes registrem suas tabelas e criem seus próprios "sistemas numéricos".

3.1.4 Atividade Complementar

A realização dessa atividade, pode criar um ambiente favorável em sala de aula para promover seminários sobre os sistemas numéricos. Os alunos podem ser divididos em grupos e cada grupo pode pesquisar sobre os primeiros indícios, onde era utilizado, a simbologia, sua evolução e aceitação pelas civilizações da época, por fim e igualmente importante, os cálculos mais utilizados. Possíveis temas para os seminários podem ser os sistemas de numeração babilônico, romano, egípcio, chinês e maia.

3.2 A MATEMÁTICA E O DESAFIO DE COLORIR UM DESENHO

As obras de Romero Britto são obras com muitas formas e um amontoado de círculos, flores, linhas, segmentos de reta, dividindo espaços do desenho com linhas pretas bem definidas, de modo que cada espaço da imagem é colorido com uma cor diferente. Assim, são muitas cores utilizadas nessas obras!

Mas e se tivéssemos que, usando uma quantidade limitada de cores, pintar o desenho sem que espaços com cores iguais se encontrassem, como seria? Este é o desafio que propomos para uma aula de Matemática utilizando a arte como motivação inicial.

E o que a matemática tem a ver com o ato de colorir um desenho? Em Matemática existe um teorema que afirma que "todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes" (SAMPAIO, 2004, p. 01). É importante destacar que regiões que se tocam num único ponto não são consideradas vizinhas. Mas, qual a origem deste teorema? Segundo Sampaio (2004):

> Conta-se a história de que, em 1852, logo após ter concluído seus estudos no University College, em Londres, o jovem matemático

> Francis Guthrie, que mais tarde tornou-se professor de matemática na África do Sul, estava um dia colorindo um mapa dos condados da Inglaterra. Enquanto coloria o mapa, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países vizinhos que tivessem alguma linha de fronteira em comum. Notou então que apenas quatro cores bastariam para colorir esse mapa. Experimentalmente, conseguiu colorir vários outros mapas, fazendo uso de apenas quatro cores. Sendo matemático, tentou demonstrar que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa, mas uma tal demonstração mostrou-se longe de ser fácil. Repassou então o problema a seu irmão, Frederick Guthrie, então estudante de matemática da mesma faculdade. Este, por sua vez, formulou o problema a seu professor, o grande Augustus De Morgan, aquele das leis de De Morgan da teoria dos conjuntos (SAMPAIO, 2004, p. 2).

Guthrie iniciou suas hipóteses em 1852, porém suas hipóteses só foram provadas em 1976, obtendo-se o chamado Teorema das Quatro Cores. De acordo com Sousa (2001, p. 1):

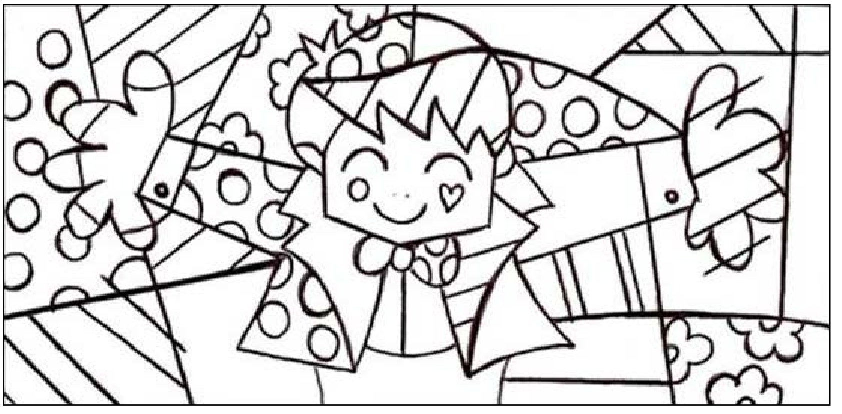
> O Problema das Quatro Cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era esse número mínimo. Mas, não obstante a aparente simplicidade, só ao cabo de mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que realmente a conjectura estava certa, obtendo-se o chamado Teorema das Quatro Cores. O Problema das Quatro Cores tem a característica indubitavelmente fascinante de ser um problema matemático de formulação muito simples, a par duma enorme complexidade de resolução, que fez com que permanecesse por resolver durante mais de uma centena de anos.

O teorema afirma que somente quatro cores são necessárias para colorir um desenho sem repetir cores em espaços vizinhos. Como podemos aplicar esse teorema ao colorir uma obra de Romero Britto? Vamos tentar fazer isso utilizando a obra “O Abraço”?

4 PROVOCAÇÃO INICIAL

Proposta 1: Utilizando apenas quatro cores, como sugere o teorema das Quatro Cores, pinte o desenho sem que espaços com cores iguais se encontrem. É possível realizar essa atividade?

Figura 6: Obra "O Abraço", de Romero Brito



Fonte: O autor, s.d.

Para realizar esta tarefa escolheremos quatro cores: rosa, verde, azul e amarelo. Neste momento é interessante deixar que o próprio aluno faça a sua escolha e tenha a liberdade de fazer suas tentativas. Iniciamos pintando. E o resulto pode ser algo parecido com este:

Figura 7: Possibilidade de preenchimento considerando a atividade proposta

Fonte: O autor, s.d.

A partir das discussões iniciais, outras questões podem ser levantadas pelos estudantes, ou mesmo pelo professor.

5 AMPLIANDO AS DISCUSSÕES

Proposta 2: Já vimos que com quatro cores é possível colorir "O Abraço" de Romero Britto. Será que é possível colorir com apenas 3 cores, respeitando a regra de que duas cores não se encontrem? E com 2 cores? Vamos verificar?

Porém, é importante lembrar que o número de cores a ser utilizada vai depender da obra escolhida, o teorema garante que quatro é um número suficiente para colorir qualquer mapa plano segundo Resende (s.d.). A mesma autora afirma que:

> [...] ao dizer-se que quatro cores são suficientes para qualquer mapa, isto não significa que sejam necessárias para cada mapa. Isto é, no máximo são precisas quatro cores. Por exemplo, se considerarmos um tabuleiro de xadrez como sendo um mapa, e cada "casa" do tabuleiro representar um país, então a coloração habitual de um tabuleiro de xadrez mostra-nos que, nesse caso, bastam apenas duas cores.

Assim, o professor pode propor aos alunos que investiguem o número de cores necessárias para colorir o desenho dado.

Observando a figura abaixo, percebemos que a tentativa realizada com apenas duas cores não tem sucesso. Logo de início a regra é quebrada, ficando espaços vizinhos com a mesma cor.

Figura 8: Possibilidade de preenchimento com apenas duas cores

Fonte: O autor, s.d.

Fazendo a tentativa desta vez com três cores, percebemos que também não obtemos êxito, pois a regra não é mantida. Podemos observar na figura 9 que apesar de conseguir colorir boa parte do desenho, chegamos a um empasse: que cor poderia ser pintada a mão do personagem? Perceba que qualquer cor dentre as três escolhidas quebrará a regra, pois já há um espaço vizinho com a mesma cor, assim como também não é possível colorir mantendo a regra o espaço com flores acima da cabeça da personagem.

Figura 9: Possibilidade de preenchimento com apenas três cores

Fonte: O autor, s.d.

É importante que o professor incentive os alunos a resolverem sozinhos, somente auxiliando-os quando necessário, para que consigam investigar e perceber como realizar a tarefa.

6 ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proposta 3: Um jogo: quatro alunos em duplas ou individuais, cada um com uma cor. Um de cada vez pinta um espaço do desenho. Quem não conseguir seguir a regra do "Teorema das 4 Cores" perde o jogo.

Com essa atividade, é possível, para além do uso de estratégias de resolução para vencer o jogo, que os estudantes desenvolvam habilidades de raciocínio lógico, percepção, atenção e concentração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, exploramos duas propostas de atividades que utilizam a História da Matemática e a Arte como recursos didáticos para o ensino de Matemática. As atividades foram desenvolvidas com o objetivo de estimular a compreensão e a reflexão dos estudantes em relação a diferentes aspectos matemáticos, promovendo o interesse e o engajamento dos alunos.

A primeira proposta buscou promover a compreensão dos estudantes sobre como os sistemas numéricos das antigas civilizações foram constituídos ao longo do tempo. Os alunos foram convidados a criar seus próprios "sistemas numéricos" com bases distintas, utilizando símbolos conhecidos por eles. Essa abordagem permitiu aos alunos refletirem sobre a construção de diferentes sistemas numéricos e diferenciá-los do sistema de numeração decimal. A segunda proposta, por sua vez, desafiou os estudantes a colorirem uma obra de arte utilizando uma quantidade limitada de cores, sem que espaços vizinhos tivessem a mesma cor. Essa atividade proporcionou uma intersecção entre a matemática e a arte, incentivando os alunos a aplicarem conceitos matemáticos em um contexto prático e criativo.

Ambas as propostas apresentam potencial para estimular o interesse dos estudantes, desenvolver habilidades matemáticas e promover reflexões críticas. Ao utilizar a História da Matemática e a Arte como recursos didáticos, pode ser possível estabelecer conexões entre diferentes áreas do conhecimento e promover aprendizagens não apenas de Matemática, mas também de Matemática, dos estudantes.

Por meio dessas atividades, ainda, os alunos podem perceber a presença da Matemática em diferentes contextos, compreender sua relevância e refletir sobre seu desenvolvimento enquanto área do conhecimento. Além disso, as propostas buscam incentivar a colaboração entre os alunos, permitindo o trabalho em grupos e o compartilhamento de ideias e descobertas.

Em suma, essas atividades representam apenas uma amostra das possibilidades que esses recursos podem oferecer, inclusive no que tange ao desenvolvimento do pensamento crítico e criativo. Esperamos que os professores encontrem inspiração nessas propostas para desenvolverem novas abordagens inovadoras e envolventes em suas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

MIRÓ, Bruno Gabriel. **Sistemas numéricos:** uma proposta utilizando UEPS e história da matemática. 2021. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

PÊGO, Daiane Aparecida. “O abraço” de Romero Britto: um olhar artístico para a matemática e um olhar matemático para a arte. 2017. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2017.

RESENDE, M. J. Problema Das Quatro Cores: quantas cores serão precisas para colorir um mapa? **Atractor**, [*S.l.*: *s.n.*, s.d.]. Disponível em: https://www.atractor.pt/matviva/geral/t5cores/. Acesso dia 19 jun. 2017.

SAMPAIO, João Carlos V. **Quatro Cores e Matemática.** *In*: BIENAL de SBM, 2., 2004. Bahia. **Anais eletrônicos [...].** Bahia: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/Quatrocores_2a-Bienalsbmretocado.pdf. Acesso em: 14 jun. 2023.

SOUSA, Lurdes. O Teorema das Quatro Cores. Millenium. **Revista do ISPV**, Viseu (Portugal), n. 24, p. 125-151, 2001. Disponível em https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/647/1/O%20Teorema%20das%20Quatro% 20Cores.pdf. Acesso em: 14 jun. 2023.

CAPÍTULO 6

A ELABORAÇÃO DE JOGOS PEDAGÓGICOS DIGITAIS UTILIZANDO O GAME DESIGN COMO FIO CONDUTOR

Ana Maria Spohr: amcspohr@gmail.com
Larissa Arianna Mekelburg da Silva: larimekel@hotmail.m
Renato Francisco Merli: renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O uso de jogos na educação tem ganhado destaque como uma abordagem inovadora e eficaz para engajar os alunos e promover um aprendizado significativo. Com o avanço da tecnologia e a popularização dos videogames, surge a oportunidade de explorar o potencial educacional dessas ferramentas interativas. Neste contexto, o design de games (a criação de um jogo) e o design instrucional (a criação de planejamentos e materiais educacionais) desempenham papéis fundamentais na criação de experiências de aprendizado envolventes e eficientes.

No presente capítulo, iremos explorar o impacto dos games na educação, abordando diferentes perspectivas e exemplos práticos. Discutiremos a relevância e as motivações por trás do uso de games na educação. Será explorado como os jogos podem proporcionar um ambiente de aprendizado imersivo, incentivando a participação ativa dos alunos e despertando o interesse por diferentes disciplinas.

Em seguida, abordaremos o design de games como chave na criação de experiências educacionais envolventes. Serão discutidos os elementos fundamentais do design de jogos, como mecânicas, narrativa e estética, e como eles podem ser aplicados de forma eficaz no contexto educacional.

Na sequência, iremos explorar o design instrucional como uma abordagem essencial para a integração dos games na educação. Será discutido como o design instrucional pode ajudar na estruturação do conteúdo educacional, na definição de objetivos claros de aprendizagem e na adequação dos desafios e recompensas dentro do jogo.

A partir dessas bases teóricas, serão apresentados dois exemplos do desenvolvimento de dois games. Descreveremos o caso do *Interstellar Math*, um jogo desenvolvido para a Educação Básica, que utiliza elementos espaciais para ensinar conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa. Em seguida, *Clash of Math*, um jogo voltado para o Ensino Superior, que combina estratégia e desafios matemáticos avançados para promover o aprendizado conceitual de História da Matemática.

Por fim, apresentaremos as considerações finais, resumindo os principais pontos discutidos ao longo do trabalho. Será destacada a necessidade de investimentos e capacitação dos educadores nesse campo, bem como possíveis direções futuras para a integração dos games na educação.

1 GAMES NA EDUCAÇÃO

Com o passar dos anos, as tecnologias digitais estão cada vez mais presentes no cotidiano de crianças, jovens e adultos, causando um impacto direto na educação, uma vez que os alunos vivem um cotidiano imerso em tecnologia, jogos, e diversos estímulos, e a sala de aula permanece (na maioria das vezes) com as mesmas metodologias de quando os alunos não tinham esse perfil. Dessa maneira, levando em consideração o cotidiano desses, a metodologia utilizada nas escolas não os atrai mais.

Nesse sentido, de acordo com Mozer (2015, p. 22), "[...] Exigem-se novas posturas do professor com relação às tecnologias integradas por redes de comunicação e informação, pois impactam diretamente no comportamento do aluno e seu desempenho escolar, bem como na relação entre aluno e professor".

Várias são as utilidades dessas tecnologias na vida dos alunos, mas basta alguns minutos de conversa com crianças ou adolescentes, que é possível perceber que o uso de jogos é uma das principais, pois além de promover a interação entre os colegas, possui um sistema de recompensas que motiva o jogador a jogar cada vez mais.

Nesta perspectiva, acreditamos que os games podem ser utilizados no ambiente escolar, pois de acordo com Mattar (2012), a motivação, engajamento e imersão com que esta geração interage com as mídias digitais fora da escola, precisa ser a mesma com que o aluno interage com o conteúdo programático das disciplinas escolares.

Com relação ao uso de games em educação, por meio de seu sistema de recompensas, existe uma relação do esforço do jogador de ganhar o jogo com a possibilidade de aprender com prazer (MOZER, 2015). Além disso, outra característica dos games que pode ser muito proveitosa para a educação é o espaço para a ocorrência de erros, "[...] os jogos digitais reduzem as consequências das falhas dos jogadores, pois, quando erram, eles sempre podem voltar à última parte que foi salva" (GEE, 2009 *apud* SANTOS; ALVES, 2018, p. 242).

2 DESIGN DE GAMES

Ao se referir ao Design de Games, inconscientemente relacionamos somente a imagem exibida na tela do jogo de um computador ou ao belíssimo layout de um jogo. De fato, a modelagem, o cenário e a trilha sonora fazem parte do processo de criação de um jogo eletrônico, mas o real desafio do game designer é criar mecânicas, regras e objetivos de um jogo que gerem engajamento por parte dos jogadores.

Mas o que seria Design de Games? Brathwaite e Schreiber (2009, *apud* MASTROCOLA, 2012) dizem que game design é o processo de criar o conteúdo e as regras de um jogo. Para eles, "[...] o bom game design é o processo de criar objetivos que o(s) jogador(es) sinta(m)-se motivado(s) a alcançar e regras que o(s) mesmo(s) siga(m) como se estivesse(m) tomando decisões significativas para atingir estes propósitos" (BRATHWAITE; SCHREIBER, 2009, *apud* MASTROCOLA, 2012, p. 35).

Outro termo muito citado quando se fala em Design de Games é, a mecânica de um game, muitos autores pontuam que a mecânica de um jogo é a essência do processo de game design:

> Mecânicas são as maneiras pelas quais os *players* se relacionam e interagem com os jogos. Mecânicas são sistemas que nos mostram o núcleo de um game. No design de um jogo, podemos usar uma única mecânica simples ou uma série de mecânicas diferentes que, quando combinadas, resultam em um complexo sistema de jogo (TREFAY, 2012, *apud* MASTROCOLA, 2012, p. 41).

McGonigal (2011, *apud* MASTROCOLA, 2012, p. 39) contribui com nossa análise em relação ao game design. A autora diz que todos os games são definidos basicamente por quatro aspectos essenciais:

> **1)** O objetivo: a finalidade específica pela qual os jogadores devem lutar;
> **2)** As regras e mecânicas: que estabelecem limitações para os jogadores atingirem os objetivos;
> **3)** O sistema de resposta: que conta aos jogadores o quão perto eles estão de atingir os objetivos;
> **4)** A participação voluntária: que determina que todos os jogadores conhecem e aceitam o objetivo, as regras e o sistema de *feedback*.

Existem alguns elementos essenciais no Design de Games que devem ser pensados ao desenvolver um jogo: enredo — a história em que o jogo está inserido; motor ou gameplay — possibilidades oferecidas ao jogador dentro do jogo e como ele as utiliza; personagens — o reflexo do jogador dentro do jogo; metas e objetivos — o que motiva o jogador e direciona suas estratégias, geralmente quando cumpridos geram benefícios; desafios — irá trazer um nível de dificuldade para o jogo e evitará de o deixar desmotivante; e *feedbacks* — mostrará ao jogador se sua estratégia funcionou ou não.

Entretanto, quando nos referimos a games pedagógicos, Mattar (2012, p. 84) apresenta algumas atitudes essenciais:

> Escolha com sabedoria: Se refere a escolha do tema, pois deve fazer a conexão com o jogo.
> Pense pequeno (às vezes): O game não precisa ser grande e complicado.
> Games educacionais são diferentes de games de diversão: Nos dois deve haver diversão, mas é necessário lembrar que o game educacional tem um objetivo de aprendizagem.
> Coloque o aprendizado e a jogabilidade em primeiro lugar: nenhum deve vir antes do outro, eles devem acontecer simultaneamente.
> Encontre o game no conteúdo: nem todos os conteúdos do currículo irão se adequar bem a um jogo.
> Jogar em todo lugar: não se limitar à sala de aula.
> Defina os objetivos de aprendizagem: qual o objetivo do jogo? O que queremos ensinar?
> Busque parcerias, mas não se limite aos padrões do instituto.
> Pensar no desenvolvimento de outras habilidades desenvolvidas com o jogo além do conteúdo a ser ensinado: não focar apenas nos aspectos pedagógicos (MATTAR, 2012, p. 84).

Mattar (2012) apresenta quatro tipos de liberdades fundamentais para que as pessoas interajam com o jogo: liberdade para experimentar, liberdade para fracassar, liberdade para experimentar novas identidades e liberdade de esforço. Tais liberdades são essenciais no processo de aprendizagem, uma vez que envolve a capacidade de se autoavaliar.

Mattar (2012) também apresenta uma série de princípios de Design de Games que devem ser pensados durante sua produção em relação a games educacionais, que incluem: permitir a realização de múltiplos estilos de jogo, embutir o jogo e o aprendizado em contextos significativos, ajudar os jogadores a se sentirem energizados e no controle, e tornar o ato de jogar social.

3 DESIGN INSTRUCIONAL

O Design Instrucional, numa visão geral, consiste na:

> [...] ação intencional e sistemática de ensino, que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a utilização de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas específicas, a fim de facilitar a aprendizagem humana a partir dos princípios de aprendizagem e instrução conhecidos (FILATRO; PICONEZ, 2004, p. 30).

Essa ação intencional e sistemática, centrada nas pessoas, busca articular os quatro novos tipos emergentes de aprendizagem: (cri)ativa, ágil, imersiva e analítica (FILATRO, 2019).

Esse design é geralmente relacionado com a produção de materiais didáticos, mais especificamente de materiais dito analógicos (que não são digitais), mas com o desenvolvimento da tecnologia, principalmente a digital, foi necessária a inserção dela no processo de ensino-aprendizagem, com uma ação sistemática de planejamento e a aplicação de novas estratégias didáticas bem como as metodologias para o ensino (FILATRO; PICONEZ, 2004).

A ação sistemática de planejamento, ou estratégias instrucionais, podem ser representadas através do Modelo de Desenvolvimento de Design Instrucional (MDDI) que "[...] se refere ao processo que um professor, um designer instrucional ou uma equipe de profissionais de educação usa para preparar e planejar o ensino" (FILATRO; PICONEZ, 2004, p. 31).

Existem vários modelos para diversos contextos educacionais, porém existem elementos comuns em cada um deles que são: análise, que consiste em definir quais são as necessidades de aprendizagem, os objetivos, qual o público-alvo e quais são as limitações; design, sendo a escolha dos profissionais necessários para a equipe, da grade curricular que será utilizada, das estratégias pedagógicas e definição do cronograma; desenvolvimento, se refere à elaboração e adaptação do objeto físico ou digital e o preparo da equipe que irá aplicar; implementação, é a execução do objeto elaborado; avaliação, análise dos resultados obtidos para saber qual foi a eficácia do que foi implementado (FILATRO; PICONEZ, 2004).

O intuito do Design Instrucional é de facilitar o processo de ensino-aprendizagem (FILATRO; PICONEZ, 2004). No entanto, deve-se tomar cuidado para que não haja exageros pois isso não condiz com o intuito dos jogos digitais, tanto que Mattar (2010) destaca que a ordem de elaboração deve ser motivação, reflexão, individualização, criação e por último o conteúdo.

Para um jogo digital ser considerado bom e dinâmico é necessário que então haja um equilíbrio entre DI (Design Instrucional) e DG (Design de Games). Dos Reis, Ribeiro e Costa (2020) afirmam que DI, DG e equilíbrio são três categorias dentro da produção de um game que precisam ser levados em consideração.

Esse esquema desenvolvido pelos autores (DI ↔ DG ↔ Equilíbrio) permite visualizar três outros aspectos no desenvolvimento do jogo: as técnicas de manipulação das ferramentas de desenvolvimento do jogo (Técnica); os Princípios de Aprendizagem em Jogos Digitais (PAJD) e a Aprendizagem em Matemática (AM). O equilíbrio acontece quando há:

> [...] uma via de troca e embora alguns pontos estejam mais presentes em um ou outro elemento do Design de Games, não significa que os outros não estejam relacionados. Além disso, à medida que um jogo evolui é importante sempre revisar e avaliar esses pontos de equilíbrio (DOS REIS, RIBEIRO, COSTA, 2020, p. 289).

As Técnicas (T) de manipulação das ferramentas incluem o uso de softwares, programação, sonorização, edição de imagens etc. No caso dos princípios de aprendizagem (PAJD), podemos nos basear nos aspectos trazidos por Rogers (2013) e por Gee (2009), ao defender que:

> [...] os bons videogames incorporam bons princípios de aprendizagem, apoiados pelas pesquisas atuais em Ciência Cognitiva, e os lista: identidade; interação; produção; riscos; customização; agência; boa ordenação dos problemas; desafio e consolidação; "na hora certa" e "a pedido"; sentidos contextualizados; frustração prazerosa; pensamento sistemático; exploração, pensamento lateral, revisão dos objetivos; ferramentas inteligentes e conhecimento distribuído; equipes transfuncionais e performance anterior à competência (GEE, 2009, p. 167).

Ressalta-se que nem sempre são necessários todos os aspectos na produção de um jogo, uma vez que depende do tipo e das características do jogo.

4 PROPOSTAS DE JOGOS PEDAGÓGICOS NO ÂMBITO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

O Design de Games desempenha um papel fundamental na produção de Jogos Pedagógicos Digitais no contexto do Ensino de Matemática. O design cuidadoso desses jogos permite a criação de ambientes interativos e engajadores, nos quais os estudantes podem explorar conceitos matemáticos de forma prática e significativa. Ao incorporar elementos como desafios, recompensas e *feedback* imediato, o Design de Games motiva os alunos a se envolverem ativamente com os conteúdos matemáticos, tornando o aprendizado mais atrativo e divertido.

Além disso, o design centrado no usuário permite que os jogos sejam adaptados às necessidades individuais dos alunos, proporcionando uma experiência personalizada e permitindo o acompanhamento do progresso de cada estudante.

Dessa forma, o Design de Games se mostra uma ferramenta poderosa para promover a aprendizagem efetiva da Matemática, transformando-a em uma disciplina mais acessível, atraente e significativa para os alunos.

Nesse sentido, apresentamos dois exemplos de jogos pedagógicos criados a partir do Design de games.

Exemplo 1 – Educação Básica – Interstellar Math

A ideia principal desse jogo é desenvolvê-lo de forma digital e com enredo, sendo uma trilha composta de 9 tabuleiros em que cada um deles aborda alguns conteúdos, envolvendo sorte e azar e, perguntas matemáticas contextualizadas de acordo com o tema principal, tornando assim o jogo mais significativo.

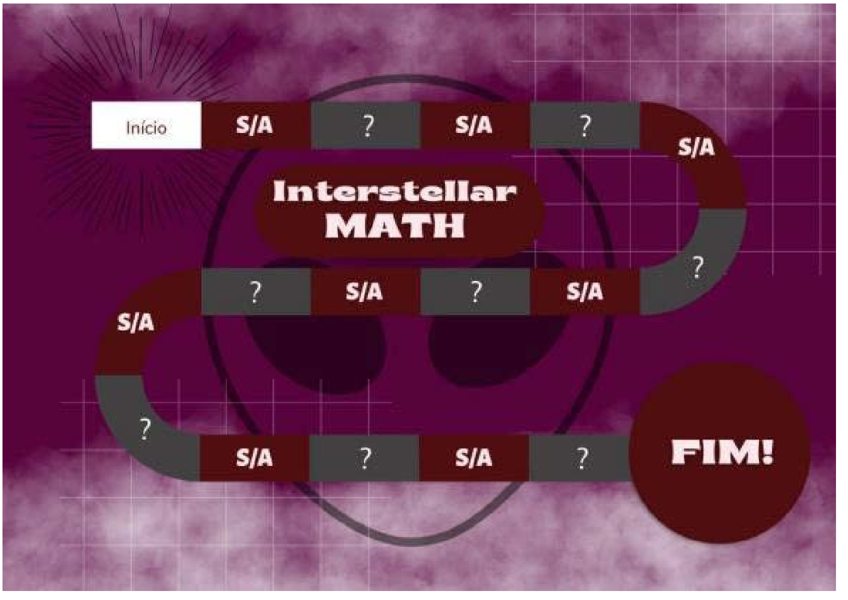
A decisão de quantos tabuleiros teriam dentro do jogo e quais conteúdos seriam tratados em cada um deles foi tomada a partir da observação do sumário do livro didático Matemática – 7.º ano, da Coleção Teláris, de Luiz Roberto Dante. Este livro foi aprovado no PNLD 2020 e é um material de divulgação baseado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este livro foi selecionado por meio do contato com um professor de Marechal Cândido Rondon, que nos indicou.

Percebemos que cada tabuleiro poderia ser um capítulo, com exceção de um deles por conta da quantidade de conteúdo que era menor. Os tabuleiros ficaram divididos da seguinte forma, com os conteúdos sendo especificados através dos títulos dos tópicos do sumário:

- **1.º tabuleiro**: Capítulo 1, conteúdos: ideia de número positivo e negativo, o conjunto dos números inteiros, comparação de números inteiros, operações com números inteiros, expressões numéricas com números inteiros, representação de pares ordenados de números inteiros no plano cartesiano, sequências.
- **2.º tabuleiro**: Capítulo 2, conteúdos: múltiplos e divisores de números naturais, frações.
- **3.º tabuleiro:** Capítulo 3, conteúdos: os números racionais, operações com números racionais.
- **4.º tabuleiro:** Capítulo 4, conteúdos: expressões algébricas, equações, equações do primeiro grau com uma incógnita.
- **5.º tabuleiro:** Capítulo 5, conteúdos: circunferência e círculo, ângulo, polígono, soma das medidas de abertura dos ângulos de um polígono.
- **6.º tabuleiro:** Capítulo 6 e 7, conteúdos: tipos de simetria, simetrias no plano cartesiano, as ideias de proporcionalidade e de razão, proporções, regra de 3 simples.
- **7.º tabuleiro:** Capítulo 8, conteúdos: números proporcionais, regra de sociedade.
- **8.º tabuleiro:** Capítulo 9, conteúdos: pesquisa estatística e termos relacionados, média aritmética, gráfico de setores, probabilidade.
- **9.º tabuleiro:** Capítulo 10, conteúdos: perímetro, área, volume.

Os capítulos que possuem poucos tópicos não significam que têm menos conteúdo, pois eles têm muitos subtópicos. Nesses casos a quantidade de páginas que cada capítulo tinha foi o nosso ponto de partida. Vale destacar que, essa foi uma primeira divisão e, à medida que forem realizados testes com os alunos, essa adequação pode ser alterada. Uma vez estabelecidas essas escolhas, a figura 1 mostra uma possível representação de um tabuleiro dentro do jogo.

Figura 1: Exemplo do tabuleiro do jogo



Fonte: Silva (2022, p. 33).

Nessa figura, percebemos que o nome do jogo é *Interstellar Math*, por conta do enredo do jogo envolver o "Fim do Mundo", em que alienígenas invadiriam o planeta Terra. Nesse enredo, os alunos são os responsáveis por cumprirem alguns desafios para conseguirem se salvar e, salvar todo o mundo.

Segundo Rogers (2013), a criação de um jogo necessita de alguns elementos, entre eles o título do jogo, plataforma (*game systems*) pretendidos, e o resumo do enredo.

- **Título do jogo**: *Interstellar Math*.
- **Plataforma (*game systems*) pretendidos:** pretendemos utilizar a plataforma *Unity* para o desenvolvimento do jogo.

Figura 2: Resumo do enredo

Fonte: Silva (2022, p. 34).

O objetivo é que este resumo apareça quando os alunos forem começar a jogar, de modo que eles entendam em qual contexto foram inseridos. Podemos definir também os outros elementos importantes citados por Rogers (2013).

- **Faixa etária dos jogadores:** 11 e 12 anos (7.º ano).
- **Diferenciais de venda:** é um jogo que dura um ano letivo inteiro e é baseado no livro didático, facilitando assim a utilização pelo professor. As questões são todas contextualizadas conforme o tema.
- **Produtos concorrentes:** não conhecemos nenhum produto concorrente que siga os mesmos princípios.
- **Modos distintos do *gameplay*:** a partir daqui iremos explicitar como funcionará o *gameplay* do jogo.

Em relação à mecânica do jogo decidimos que cada aluno jogará sozinho contra mais três pessoas. Os alunos serão divididos em grupos de 4 e jogarão os tabuleiros ao mesmo tempo. Caso o número de alunos não seja múltiplo de 4, então a prioridade será formar grupos de 3.

A seguir será apresentado o manual de instruções para entender como o jogo irá funcionar, para os alunos aparecerá como uma tela em que a qualquer momento eles terão a opção de ir em uma aba que para acessar novamente essas instruções.

Manual de instruções:

- O jogo consistirá em uma trilha que vocês terão que percorrer e nela terão os tabuleiros para serem jogados referentes aos capítulos do livro didático;
- Todos os alunos começam na casa inicial;
- O aluno que tirar o maior número no dado começa o jogo, o que tirar o segundo maior número será o segundo a jogar, e assim por diante;
- A quantidade de casas que andará será o número sorteado no dado;
- Existem dois tipos de casas no tabuleiro. Uma que, quando o aluno parar nela, aparecerá uma carta de sorte ou azar e o aluno terá que cumprir o que a carta mandar, podendo ter uma recompensa ou consequência. A outra será a casa dos desafios, em que o aluno receberá um problema para tentar resolver, tendo consequências caso acerte e caso erre;
- Cada recompensa e consequência poderá significar que você ganhará ou perderá pontos, avançar ou voltar casas do tabuleiro;
- Quem chegar primeiro na casa final ganhará cem pontos, o que chegar por segundo ganhará oitenta pontos, por terceiro sessenta pontos e por último quarenta pontos;
- O aluno vencedor será o que acumular mais pontos no fim do jogo, após percorrer todos os tabuleiros e terminar a trilha;
- O aluno que vencer o jogo será a pessoa que conseguirá salvar o mundo dos alienígenas.

Ao entrar no jogo os alunos poderão escolher o personagem que vão querer ser, são oito opções com características, cada opção tem personalidades e físicos diferentes, conforme Rogers (2013) sugere. Os personagens foram feitos dessa forma com o objetivo de gerar identificação com os jogadores e foi utilizado o aplicativo *Bitmoji*[1] para elaboração. Vamos apresentar a seguir duas opções de personagens.

1 O aplicativo Bitmoji permite criar emojis pessoais ou de personagens criados. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bitstrips.imoji&hl=pt_BR. Acesso em: 26 abr. 2024.

PRIMEIRO PERSONAGEM (FEMININO): JULIA. (FIGURA 3)

Personalidade: Julia é uma menina destemida e simpática, gosta de brincar e principalmente jogar basquete com seus amigos.

Descrição do personagem: Julia será uma menina negra e cadeirante, com roupas esportivas de basquete.

Figura 3 - Personagem Julia

Fonte: Silva (2022, p. 36).

SEGUNDO PERSONAGEM (MASCULINO): PEDRO. (FIGURA 4)

Personalidade: Pedro é um garoto engraçado e esforçado, o que ele mais gosta de fazer é ouvir música e brincar com o seu cão guia Max.

Descrição do personagem: Pedro será um garoto loiro e cego, suas roupas serão de sua banda favorita.

Figura 4 - Personagem Pedro

Fonte: Silva (2022, p. 38).

Foram feitos também exemplos de como serão e aparecerão as telas com os problemas para os jogadores (figura 5a, figura 5b, figura 5c e figura 5d).

Figura 5: Exemplos de telas de problema

Fonte: Silva (2022, p. 41).

Além das cartas problemas, apresentamos na figura 6, exemplos de cartas de sorte e azar.

Figura 6: Exemplo de carta de sorte

Fonte: Silva (2022, p. 41).

Essas cartas, dentro do jogo, correspondem ao que pensamos para o design gráfico do jogo, pautados no DG e no DI. Cada problema contextualizado será de uma situação diferente que eles poderão acabar tendo que resolver no decorrer do jogo. O equilíbrio entre os DG e DI foram sempre levados em consideração. Por exemplo, na parte dos desafios queremos que a pergunta não seja algo abstrato, sem relação com nada, mas que seja contextualizado e faça sentido ao jogador/aluno, ou seja, esperamos com isso, que o jogador/aluno, desmistifique o imaginário de que jogo pedagógico é chato.

Ressaltamos que esse equilíbrio não deve acontecer somente em uma etapa, mas na elaboração do jogo inteiro, tornando-o mais dinâmico, divertido e motivador para o jogador/aluno. A vinculação com o livro didático nas cartas de questões pode ser expressa na figura 7.

Figura 7: Aspectos para elaboração das questões contextualizadas

Fonte: Silva (2022, p. 42).

Exemplo 2 - Ensino Superior - Clash Of Math

O jogo *Clash Of Math* é um jogo direcionado para o ensino superior, especificamente alunos do curso de Licenciatura em Matemática e da disciplina de História da Matemática.

Nesta disciplina, são realizadas discussões de como a matemática tem sido desenvolvida ao longo da história, ou seja, estuda-se a matemática que é utilizada atualmente, mas da maneira como a utilizavam na época. Dessa maneira estudamos os períodos da História da Matemática (pois cada período aconteceu em uma época e em um lugar específico, na ordem cronológica), matemáticos que marcaram cada época, conteúdos desenvolvidos em cada período (incluindo o sistema de numeração de cada lugar e época) e problemas da época.

O jogo foi batizado *Clash of Math* (Confronto da Matemática) devido a referência do jogo comercial que utilizamos, o War (figura 8).

Figura 8: War Game

Fonte: Verli, 2015.

No War, cada jogador precisa usar sua estratégia para conquistar territórios e continentes e derrotar seus adversários, se sentindo no papel de um general. No início do jogo, cada jogador sorteia um objetivo e, vence a partida, quem atingi-lo primeiro.

O objetivo do *Clash of Math* é ensinar Matemática por meio da História. Os jogadores, para atingir seus objetivos no jogo, precisarão ter conhecimento de História da Matemática e de Matemática, pois as perguntas remeterão aos conteúdos como eram vistos à época. Por exemplo: a primeira fase diz respeito ao período matemático do Egito, sendo assim, as perguntas serão sobre o sistema de numeração da época, os processos de multiplicação e divisão utilizados, o significado de fração unitária, entre outros.

O *Clash of Math* consiste em uma guerra entre os jogadores (de 3 a 6) que irá acontecer em países (regiões) referentes a algum período matemático, tendo o objetivo de aprender sobre a matemática e sua história. Cada fase representará um período e um lugar, na ordem histórica. No início do jogo, cada jogador recebe um objetivo (exemplo na figura 9) e um certo número de exércitos. Vence o jogo que completar seu objetivo por primeiro (os outros jogadores não saberão qual é o objetivo alheio).

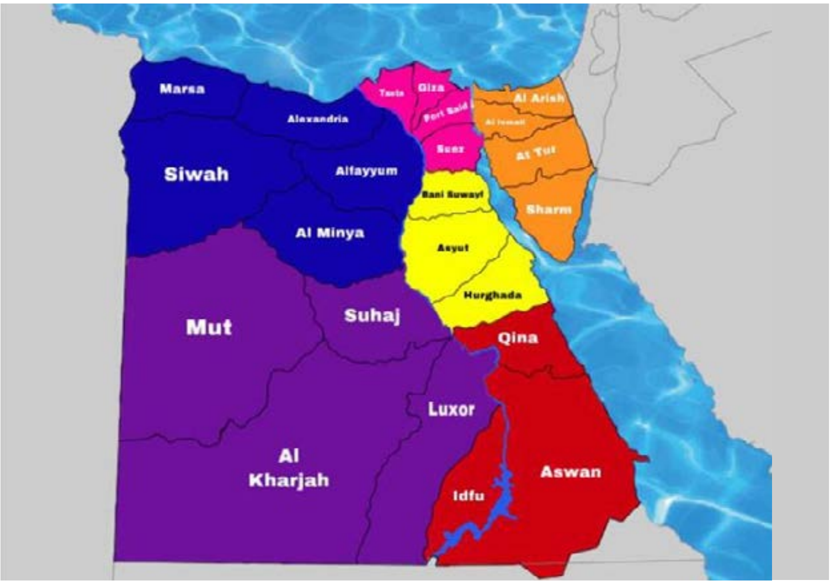
Os objetivos consistem em dominar uma região completa, ou um certo número de territórios, ou até mesmo derrotar um certo adversário. Explicaremos melhor o que é região, exércitos e territórios a seguir.

Figura 9: Exemplo de objetivo

Fonte: Spohr (2022, p. 36).

Cada fase será referente a um período matemático e seguirá a ordem histórica. Como cada fase será referente a um período da História da Matemática, o cenário do jogo será o mapa do local e os conteúdos abordados serão referentes aos desenvolvidos na época, ou seja, cada período histórico (ou fase do jogo), terá um cenário diferente. O cenário utilizado na primeira fase (Egito Antigo) pode ser visto na figura 10, a seguir:

Figura 10: Cenário



Fonte:Spohr (2022, p. 42).

Cada uma das cores representa uma região com um conteúdo a ser abordado e cada pequena divisão dentro de cada região é chamada de território. Cabe destacar que essas regiões e conteúdos atrelados não foram escolhidos de forma aleatória, mas por meio de pesquisas a livros de História da Matemática (História na Educação Matemática de Antonio Miguel e Maria Miorim; História na Educação Matemática: propostas e desafios de Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira).

Região Rosa: volume do tronco da pirâmide (a escolha desse conteúdo para esse lugar foi feita devido as primeiras pirâmides terem sido construídas em Giza);

Região Roxo: Sistemas de numeração; Região Azul – Multiplicação/divisão; Região Vermelha – Área de círculo; Região Laranja – Equação do 1.º grau; Região Amarela – Fração/fração unitária.

No início do jogo, todos os territórios do tabuleiro são sorteados entre os jogadores e eles recebem um exército para posicionar em cada território de seu domínio. Cada jogador escolhe uma cor para se identificar no jogo e os exércitos, que são representados por pecinhas, respeitam essa cor.

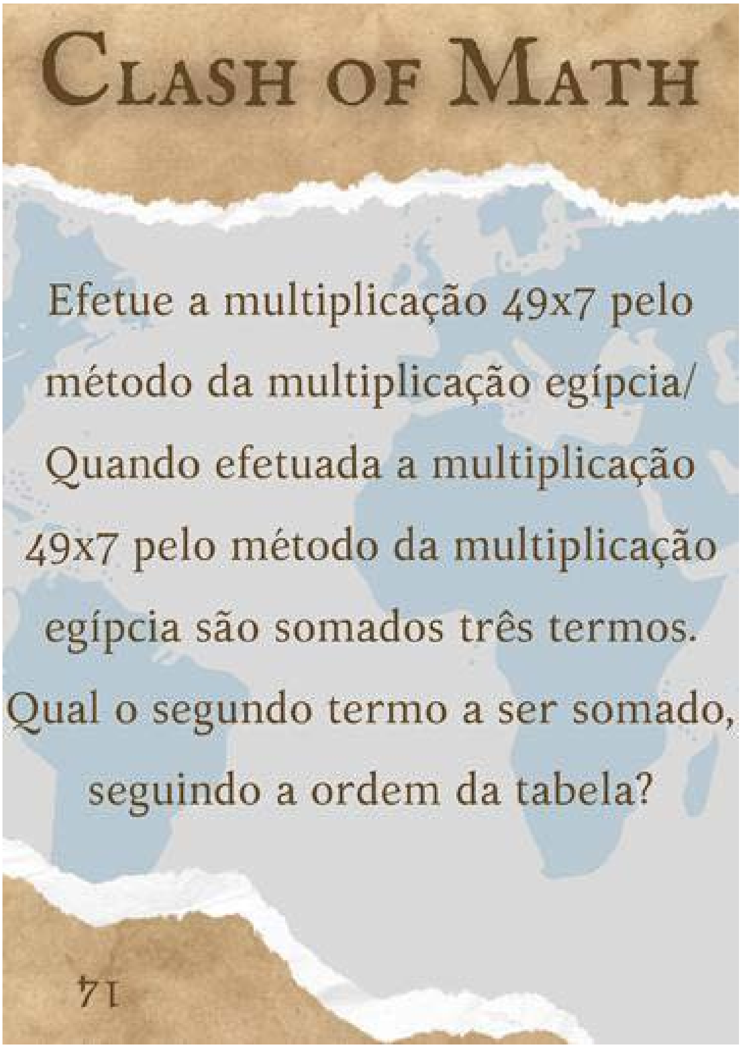
A cada rodada, é dada a possibilidade a todos os jogadores de realizarem ataques, quantas vezes quiserem, de acordo com os seus objetivos. Assim que perceber que não é mais viável e decidir parar, o próximo jogador pode realizar os ataques e, quando essa oportunidade for dada a todos, termina a rodada e se inicia a próxima.

Ao fim de cada rodada, é contabilizado o número de territórios de cada jogador, pois ele pode ter dominado ou perdido algum, divide-se esse número por dois e é entregue a cada jogador esse número de exércitos para posicionar em seus territórios. Por exemplo, se o jogador finalizar a rodada com 16 territórios, 16: 2 = 8, logo, ele recebe 8 exércitos novos ao início dessa nova rodada para posicionar em seus territórios.

Os ataques funcionam da seguinte maneira: é possível atacar utilizando um, dois ou três exércitos e os ataques podem ser realizados somente nos territórios vizinhos, ou seja, é preciso ter no mínimo dois exércitos no território para realizar ataques, pois assim atacará com um e o outro ficará como exército de ocupação, todos os territórios do tabuleiro precisam ter no mínimo um exército.

Diferentemente do War comercial, em que vence a batalha quem vencer uma batalha de dados, no *Clash of Math* vence quem responder corretamente e mais rápido uma pergunta referente ao conteúdo da região atacada. O nível de dificuldade será de acordo com o número de exércitos que atacar ou defender, vence quem responder a sua respectiva pergunta corretamente mais rápido.

Figura 11: Exemplo de pergunta

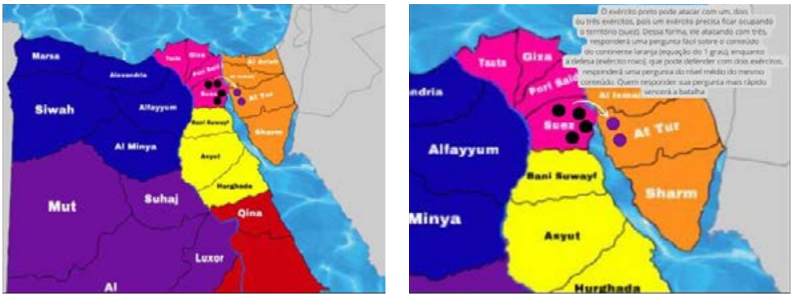


Fonte: Spohr (2022, p. 37).

Na versão física, a carta da questão terá no canto inferior, de ponta cabeça, a resposta da questão (como mostrado na Figura 11). Assim, uma terceira pessoa irá realizar a pergunta e essa irá conferir a resposta. No jogo digital a resposta será conferida pelo próprio sistema.

Como já citado, o nível de dificuldade das respostas será definido pelo número de exércitos que o jogador escolher atacar ou defender, por exemplo, se um jogador escolher atacar algum território do continente laranja com três exércitos (Figuras 12a e 12b), e a defesa defender com dois exércitos, o atacante sorteará uma pergunta entre as fáceis de equação do 1.º grau, enquanto a defesa sorteará uma pergunta entre as médias desse conteúdo. Quem responder a sua respectiva pergunta mais rápido vence a batalha. Se o ataque e a defesa utilizarem o mesmo número de exércitos, a pergunta sorteada será a mesma, caso sejam utilizados diferentes, cada um responde a pergunta do conteúdo respectiva ao nível de dificuldade que for relativo ao número de exércitos que utilizou.

Figura 12: Exemplo de jogada



(a) (b)

Fonte: Spohr (2022, p. 44).

Na maioria das vezes, jogos pedagógicos direcionados à disciplina de matemática focam somente no conteúdo, não possuem história e, a mecânica presente no jogo, se refere apenas à resolução de fórmulas.

No *Clash of Math*, procuramos dar uma atenção extra ao enredo e história contida no jogo. Dessa forma, durante a partida, curiosidades serão apresentadas sobre a época e que, caso o jogador queira saber mais, terá acesso a um documento que irá explicar o necessário para responder as perguntas sobre o assunto e, caso se interesse ainda mais, terá acesso a lista de exercícios que ele poderá utilizar para estudar posteriormente e terá vantagem sobre os adversários.

Além disso, os jogadores também poderão aprender sobre os matemáticos de cada período, uma vez que existem "cartas matemáticas" que oferecerão benefícios aos jogadores, elas só poderão ser desbloqueadas no período em que o matemático viveu e de acordo com a pontuação do jogador (que irá acumulando com seu desempenho ao longo do jogo).

Elas poderão ser utilizadas quando o jogador preferir. O jogador poderá desbloquear "Cartas Matemáticas" que serão referentes a matemáticos de cada período de acordo com os pontos acumulados podendo lhe trazer benefícios nas batalhas. Ele poderá utilizar os benefícios das cartas quando lhe for conveniente e sentir a necessidade.

Para essa fase, também foi criada uma carta matemática. Como não existem relatos de matemáticos que viveram na época do Egito antigo, colocamos uma figura egípcia que será a representante, a Cleópatra (Figura 13).

Figura 13 - Exemplo carta matemática

Fonte: Spohr (2022, p. 46).

O símbolo de lâmpada indica que um dos benefícios da carta será uma dica referente ao conteúdo indicado, as barras verdes transformam uma questão difícil ou média em fácil, e as amarelas transformam uma questão difícil em média. O máximo que cada carta pode proporcionar é três benefícios de cada, as unidades de cada benefício são representadas por quantos símbolos coloridos têm, os cinzas são desconsiderados. Por exemplo, na carta acima o jogador terá direito a uma dica referente a multiplicação e divisão, podendo transformar duas questões em questões fáceis e uma em média.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, examinamos o impacto dos jogos na educação, discutindo diferentes perspectivas e fornecendo exemplos práticos. Destacamos a relevância e as motivações por trás do uso de jogos na educação, mostrando como eles podem proporcionar um ambiente de aprendizado imersivo e despertar o interesse dos alunos por diversas disciplinas.

Abordamos o design de games como uma chave para a criação de experiências educacionais envolventes. Discutimos os elementos fundamentais do design de jogos, como mecânicas, narrativa e estética, e como eles podem ser aplicados de maneira eficaz no contexto educacional. O design instrucional também foi explorado como uma abordagem essencial para a integração dos jogos na educação, ressaltando como ele pode ajudar na estruturação do conteúdo educacional, na definição de objetivos claros de aprendizagem e na adaptação dos desafios e recompensas dentro do jogo.

Apresentamos dois exemplos práticos de aplicação dos jogos na educação: *Interstellar Math*, um jogo para a educação básica que utiliza elementos espaciais para ensinar conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa, e *Clash of Math*, um jogo voltado para o ensino superior que combina estratégia e desafios matemáticos avançados para promover o aprendizado conceitual de História da Matemática.

Em resumo, o uso de jogos na educação pode trazer benefícios significativos para o processo de ensino-aprendizagem. Engajar os alunos de maneira lúdica e imersiva, fornecer um ambiente seguro para cometer erros e aprender com eles, além de promover a motivação e a participação ativa dos alunos são alguns dos pontos fortes dessa abordagem. No entanto, é essencial investir em capacitação para os educadores e direcionar recursos para o desenvolvimento e a implementação de jogos educacionais de qualidade. Com esforços nessa direção, podemos explorar ainda mais o potencial dos jogos na educação e abrir caminho para futuras integrações e inovações nesse campo.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, 7.º ano:** ensino fundamental anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018. Disponível em: encurtador.com.br/avW08. Acesso em: 7 mar. 2022.

DOS REIS, Tiago Rodrigues; RIBEIRO, Rayane Kellye Pereira; COSTA, Hawbertt Rocha. O Equilíbrio entre *Design* de Games e o Design Instrucional no Desenvolvimento de um Game Pedagógico. **Revista Debates em Ensino de Química**, v. 6, n. 1, p. 282-306, 2020. Disponível em: encurtador.com.br/bfBQ1 . Acesso em: 16 mar. 2022.

FILATRO, Andrea. **DI 4.0:** inovação em educação corporativa. São Paulo: Saraiva Educação, 2019.

FILATRO, Andrea; PICONEZ, Stela Conceição Bertholo. **Design Instrucional contextualizado.** São Paulo: Senac, 2004.

GEE, James Paul. Bons videogames e boa aprendizagem. **Perspectiva**, [*s.l.*], v. 27, n. 1, p. 167-178, 2009. Disponível em: encurtador.com.br/ilns7 . Acesso em: 16 jun. 2022.

MASTROCOLA, Vicente Martin. **Ludificador:** um guia de referências para o game designer brasileiro. São Paulo: 2012.

MATTAR, João. **Games em educação:** como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MATTAR, João. **Games em Educação**: como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson, 2012.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria. **História na Educação Matemática:** propostas de desafios. Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOZER, Merris. **Game Over:** desafiando os baixos índices de aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias) – Unopar, Londrina, 2015. Disponível em: encurtador.com.br/sCEL1 Acesso em: 08 dez. 2021.

ROGERS, Scott. **Level UP:** um guia para o design de grandes jogos. [*S.l.*]: Blucher, 2013.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

SANTOS, William de Souza; ALVES, Lynn Rosalina Gama. Jogos Digitais: um *level up* para a educação matemática brasileira. **Revista de Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 2, p. 239-252, jul. 2018. Disponível em: https://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Educacao/article/view/4153. Acesso em: 08 dez. 2021.

SILVA, Larissa Arianna Mekelburg da. **Interstellar Math**: Design de um game pedagógico. 2022. Monografia (Graduação em) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2022. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31515. Acesso em: 12 jun. 2023.

SPOHR, Ana Maria Costa. **Clash do Math:** design de um jogo pedagógico digital para o ensino de História da Matemática. 2022. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2022. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/30648. Acesso em: 31 maio 2023.

VERLI, Gabriel. **O jogo de tabuleiro War irá ganhar a versão digital**. [*S.l.*]: Sétima e Nona, 2015. Disponível em: encurtador.com.br /qzET4. Acesso em: 13 jun. 2022.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS FORMAS INDETERMINADAS DO CÁLCULO PARA O ENSINO BÁSICO

Luiz Gabriel Martins: luiz.martins1@ufpr.br
Araceli Ciotti de Marins: araceli@utfpr.edu.br
Robson Wilians Vinciguerra: robsonw@utfpr.edu.br

Dentre os diversos significados para a palavra "indeterminação", aquele que aparenta caracterizar sob um olhar matemático, define como algo ou alguma coisa que não é determinável ou não está bem definido. Conforme Desanti (2017), esse termo incorpora significados específicos em diferentes campos da Matemática. Por exemplo: na Álgebra Linear, se refere aos sistemas de equações que apresentam infinitas soluções; no Cálculo Diferencial e Integral se refere a um conjunto de expressões que surgem a partir do cálculo de limite de funções de uma variável real .

No contexto do Cálculo, Lima (2019) apresenta as formas indeterminadas como sendo:

$$\frac{0}{0}, \qquad \infty-\infty, \qquad 0\times\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Mas o que elas significam? Conforme dito acima, são expressões que resultam do cálculo de alguns limites para determinadas funções. Na teoria da Análise Real, é possível definir, por exemplo, $0/0$ da seguinte forma:

> Sejam $X \subset \mathbb{R}$, f, $g{:}X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ [onde X' denota o conjunto dos pontos de acumulação de X]. Suponhamos que [se tenha] $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$, se tenha ainda $a \in Y'$. Então $f(x)/g(x)$ está definida no conjunto Y e, faz sentindo indagar se existe $\lim_{x\to a} f\frac{f(x)}{g(x)}$. Pois bem; nada se pode dizer, em geral sobre esse limite. Dependendo das funções f, g, ele pode assumir qualquer valor real ou não existir (LIMA, 2019, p. 146-147).

Assim, podemos dizer que uma expressão é considerada indeterminada quando o valor do seu limite, a depender da escolha da função, pode assumir um número real arbitrário ou simplesmente não existir. No caso dos limites, Desanti (2017) observa que é possível construir estratégias, seja por meio de artifícios algébricos ou geométricos, para obter o valor preciso do cálculo do limite, ou ainda, se faz o uso da Regra de L'Hôspital, que é um recurso simples e fácil para resolver essas formas indeterminadas (BARBOSA, 2008).

Contudo, algumas das expressões indeterminadas podem aparecer no Ensino Básico, como é o caso das formas $0/0$ e 0^0. Há certa dificuldade em justificar o motivo dessas expressões, já que a teoria de limites ou derivadas não faz parte do conteúdo programado para este nível de ensino. Além disso, os livros didáticos em muitas situações procuram omitir ou, quando reconhecem a existência, comentam brevemente que não há significado algum.

Nesse contexto, este capítulo apresenta uma síntese do trabalho de conclusão de curso do primeiro autor (MARTINS, 2021) e toma como objetivo principal o de justificar as razões que levam a tais expressões ganharem tal nome. Além disso, são apresentadas algumas atividades, para o Ensino Básico, para que seja possível realizar uma discussão a respeito das formas indeterminadas ainda nesse nível de ensino, como também um roteiro de como mostrar de maneira matemática que as formas são indeterminadas.

1 CONSTRUINDO O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS $\mathbb{Q}$

Nesta seção apresentaremos a construção dos números racionais $\mathbb{Q}$ a partir dos números inteiros. Com efeito, consideremos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com as operações usuais de soma "+" e multiplicação "x".

Agora, sobre o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*=\{(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*|a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^*\}$ vamos definir a seguinte relação $\sim$: $(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$.

Dados $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, temos que: (i) $\sim$ é reflexiva, já que $ab=ab\Longrightarrow(a,b)\sim(a,b)$; (ii) $\sim$ é simétrica, uma vez que se $(a,b)\sim(c,d)$, então decorre que $ad=bc\Longrightarrow cb=da\Longrightarrow(c,d)\sim(a,b)$; e (iii) $\sim$ é transitiva, pois $(a,b)\sim(c,d)$ e $(c,d)\sim(e,f)$ implica em $ad=bc$ e $cf=de$. Resulta daí que $adf=(ad)f=(bc)f=b(cf)=bde$. Portanto, $(af-be)d=0\Longrightarrow af=be$ ou $d=0$, pois $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ é um domínio de integridade[1]. Como $d\in\mathbb{Z}*$ devemos ter que $af=be$. Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

As classes de equivalência são denotadas por $\frac{a}{b}$, e definidas como: $\frac{a}{b}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*|\ ay=bx\}$.

Desta forma, segue que o conjunto quociente $\mathbb{Q}$ é definido como: $\mathbb{Q}=\{ab\mid(\frac{a}{b})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$, que é chamado de conjunto dos números racionais. As operações de soma e multiplicação nele são definidas da seguinte forma:

$$\frac{a}{b}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*|\ ay=bx\}.$$

Desta forma, segue que o conjunto quociente $\mathbb{Q}$ é definido como:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right\},$$

que é chamado de conjunto dos números racionais. As operações de soma e multiplicação nele são definidas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} +:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} & \text{e} & \cdot:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\mapsto\frac{ad+bc}{bd} & & \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\mapsto\frac{ac}{bd} \end{array}$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ munido com tais operações é um corpo. A demonstração detalhada[2] que todas as propriedades de corpo são satisfeitas pode ser encontrada em Martins (2021, p.66-67).

Por fim, é interessante comentar que é possível associar os números inteiros ao seguinte subconjunto dos números racionais $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}=\left\{\frac{a}{1}\mid a\in\mathbb{Z}\right\}$, através do seguinte isomorfismo de anéis (aplicação linear bijetora):

1 Um domínio de integridade é um anel $(A,+,\cdot)$ comutativo com identidade que vale a seguinte propriedade: se $ab=0$, então $a=0$ ou $b=0$.

2 Embora a demonstração apresentada no trabalho citado anteriormente é aplicada a um contexto geral, as ideias são as mesmas para este caso particular.

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$$
$$a \rightarrow \frac{a}{1}$$

É pertinente comentar que nas próximas sessões faremos a identificação $a/1=a$, ainda que estes, a rigor, não sejam elementos de mesma natureza (já que um é uma classe de equivalências, enquanto o outro é apenas um elemento).

2 POTENCIAÇÃO

Nesta seção apresentaremos uma maneira de definir potências de base real e expoente real. Apesar de ser o ideal, apresentar uma definição direta para esse objeto é um tanto quanto difícil. Um meio de alcançar esse objetivo é fazendo a definição para casos particulares e ir estendendo até chegar ao mais geral o possível.

Desta forma, começamos apresentando a definição de potências reais com expoentes naturais:

Definição (Potência de um número natural): Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos como a potência de base a e expoente n, o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n a \end{cases}$$

Observe que a definição é feita através de uma recorrência, isto é, para determinar a^n, para certo $n>1$, é necessário conhecer os valores $a^2,\ldots, a^{n-1}$. Uma vez que está definida as potências para expoentes naturais, o próximo passo é dar significado aos de expoente inteiro.

Definição (Potência de um número inteiro) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Definimos como a potência de base a e expoente n, o número a^n tal que:

$$a^n = \begin{cases} a^{n-1} \cdot a, & se\ n > 0 \\ 1, & se\ n = 0, a \neq 0 \\ (a^{-n})^{-1}, & se\ n < 0, a \neq 0\,. \end{cases}$$

Perceba que a definição de potências de expoente inteiro negativo depende da de expoente inteiro positivo, que por sua vez dependem dos expoentes naturais. Dessa forma, como $0^n=0$ para todo natural n e $1/0$ não está definido, não é possível dar uma definição para potências de base nula e expoente negativo.

Agora, estamos interessados em dar significado para potências de expoente racional. É pertinente comentar que este não é um procedimento direto. Isso se deve ao fato que é necessário, antes de tudo, definir potências com expoentes da forma 1^n, com $n \in \mathbb{N}$ – na verdade, prova-se que existe uma solução real positiva para equações do tipo $x^n=a$, com $n\in\mathbb{N}$ e $a>0$, a saber, $b=a^{\frac{1}{n}}$. Uma vez que este objeto está bem definido, pode-se definir para expoentes racionais em geral.

Definição (Potência de um número racional) Sejam $a>0$ real e $n\in\mathbb{Q}$ tal que $n=$ com $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{N}$. Definimos como a potência de base a e expoente n, o número a^n tal que

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

É pertinente comentar que é possível definir o número a^n quando $a<0$. Neste caso, devemos tomar um cuidado extra, para que ele ainda pertença ao conjunto dos números reais. No caso em que $a=0$, considera-se $a^n=0$ para todo $n=\dfrac{p}{q}$, com p, $q \in \mathbb{N}$.

Naturalmente, o próximo passo é estender a definição para qualquer número real. Ora, como dado um número real $x\in\mathbb{R}$, só ocorre que $x\in\mathbb{Q}$ ou $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, basta definir potência de expoente real para o caso em que o expoente seja racional e irracional. Como o primeiro já foi definido é suficiente dar uma definição para potências de expoente irracional.

Assim como os números irracionais podem ser caracterizados utilizando-se dos racionais, podemos adaptar essa ideia para definir as potências de expoentes irracionais em função das de expoente racional, que já foram definidos previamente.

Definição (Potência de um número irracional) Sejam $a>1$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} | \ r < \alpha\} \ e \ A_2 = \{s \in \mathbb{Q} | s > \alpha\}.$$

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r | \ r \in A_1\} \ e \ \ B_2 = \{a^s | s \in A_2\}\,.$$

Nestas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e excesso,respectivamente, de a^α e B_1 e B_2 são classes que definem a^α.

Se $0<a<1$, então defina B_1 e B_2 como sendo $B_1=\{a^r | r\in A_1\}$ e $B_2=\{a^s | s\in A_2\}$.

Para $a=0$, *segue que* $a^{\alpha}=0$ *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *com* $\alpha>0$. *Também, para* $a=1$, *segue que* $1^{\alpha}=1$ *para qualquer que seja* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Observamos que quanto mais próximos r e s estão de α, melhor é a aproximação de a^{α}.

Outra forma de caracterizar as potências de base e expoente reais, que é bastante conveniente, é através dos ínfimo e supremo. De fato, dado $a>0$ e $x\in\mathbb{R}$, podemos caracterizar a potência de base a e expoente x o número a^x tal que: $a^x=\sup\{a^r|r<x,r\in\mathbb{Q}\}=\inf\{a^s|s>x,s\in\mathbb{Q}\}$,*se* $a>1$, $a^x=\inf\{a^r|r<x, r\in\mathbb{Q}\}=\sup\{a^s|s>x, s\in\mathbb{Q}\}$, *se* $0<a<1$.

No caso que $a=1$, podemos definir $a^x=1$, enquanto que para $a=0$, tem--seque $a^x=0$, para todo número real positivo.

3 DISCUSSÕES

Nesta seção será feita uma discussão dos motivos que levam as expressões 0^0 e $\frac{0}{0}$ a serem consideradas indeterminadas. A seção está organizada da seguinte maneira:na subseção 3.1 são apresentadas justificativas formais, levando em conta o que foi apresentado nas seções anteriores; enquanto na seção 3.2 são apresentadas algumas atividades para discutir a respeito do tema na Educação Básica; e, por fim, na subseção 3.3 é apresentado um roteiro de como demonstrar que tais expressões são indeterminadas.

3.1 JUSTIFICATIVAS

Note que a forma indeterminada $0\hat{}0$ se assemelha com uma fração cujo numerador e denominador são iguais a 0. No entanto, devemos ter em mente que isso não corresponde a uma fração, visto que no processo de construção dos números racionais não são incluídas frações cujo denominador é igual a 0. Dentro deste contexto, pode se questionar, com certa naturalidade, por quais motivos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não admite frações com denominador 0?

Ao tentarmos realizar a construção dos números racionais $\mathbb{Q}$ a partir do conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, teríamos que a relação $\sim$ deixaria de ser uma relação de equivalência, pois não satisfaz a propriedade transitiva. Com efeito, tomando $(1,2),(1,3)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, temos que $(1,2)\sim(0,0)$ e $(0,0)\sim(1,3)$, já que $1\cdot0=2\cdot0$ e $0\cdot3=0\cdot1$, mas $(1,2)\nsim(1,3)$ pois $3= 1\cdot3\neq2\cdot1=2$. Caso tivéssemos uma relação de equivalência, então, nesse caso, teríamos que a classe de equivalência $0/0$ representaria todo o conjunto, uma vez que $(a,b)\sim(0,0)$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Agora, se considerarmos o conjunto $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0,0)\}$, apesar de termos o conjunto quociente $\frac{G}{\sim}$, já que $\sim$ será uma relação de equivalência, o conjunto não é fechado para as operações de adição e multiplicação (da maneira como são definidas a soma e o produto de frações). De fato, escolhendo $\frac{m}{0}$ e $\frac{n}{0}$, segue que $\frac{m}{0}+\frac{n}{0}=\frac{m\cdot 0+0\cdot n}{0\cdot 0}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0}\notin\frac{G}{\sim}$, e $\frac{n}{0}\cdot\frac{0}{n}=\frac{n\cdot 0}{0\cdot n}=\frac{0}{0}\notin\frac{G}{\sim}$.

Diante do exposto acima, podemos inferir que não é possível construir o conjunto dos números racionais incluindo as frações com denominador 0 pois esse conjunto não satisfaria as condições para ser um corpo.

Com respeito à forma indeterminada 0^0, observamos que essa se assemelha com a potência de base real 0 e expoente 0. Para compreender por quais motivos não se atribuí $0^0=1$, devemos compreender, antes, por quais motivos $a^0=1$, quando $a\neq 0$.

A definição não é arbitrária e podemos fornecer três possíveis justificativas para esse fato. Pela definição dada para potências de expoente natural, temos que $a^1=a$. Por outro lado, da forma como é definida para potências de expoente inteiro, temos que $a^1=a^1-{}^1a=a^0a=aa^0$. Como as definições devem coincidir, segue que $a=a^1=aa^0=a^0a\Longrightarrow\begin{cases} aa^0=a \\ a^0a=a \end{cases}$.

Para que as equações acima sejam satisfeitas, é necessário que $a0$ corresponda a algum número que quando multiplicado por ele, resulte nele mesmo. Ora, mas esta é a definição do elemento neutro. Como esta equação é feita sobre os reais com as operações usuais e o elemento neutro do produto é único, decorre que devemos ter $a^0=1$.

Outra maneira de se chegar a essa conclusão é utilizando a propriedade da soma de expoentes inteiros. Com efeito, temos:
$1\cdot a=1\cdot a^1=a^1=a^{1+0}=a^1a^0=a^0a^1=a^0\cdot a$

Sendo $\mathbb{R}$ um domínio de integridade, segue que todo elemento não nulo é regular para multiplicação. Como supomos que $a\neq 0$, resulta que $1=a^0$.

Por fim, é possível chegar à mesma conclusão através da propriedade da subtração para expoentes inteiros. Ora $a^0=a^{1-1}=\frac{a^1}{a^1}=\frac{a}{a}=\frac{1}{1}=1$.

Observe que nos três cenários, se tivéssemos que $a0\neq 1$, certamente chegaríamos a uma contradição. Contudo, quando $a=0$, essas implicações não são necessariamente válidas.

No primeiro caso, como já comentado, a^0 desempenha o papel de elemento neutro da multiplicação. Contudo, se tomarmos $a=0$, por $0\cdot c=0=c\cdot 0$ para todo $c\in\mathbb{R}$, temos $0\cdot 0^0=0$ e $0^0\cdot 0=0$ independentemente do valor que 0^0 assume.

Já no segundo caso, a hipótese de que $a\neq 0$ é indispensável para se concluir que $a^0=1$. Pondo $x=a^0$, podemos interpretar $a=a\cdot a^0=a\cdot x$ como uma equação linear. Nesse sentido, quando $a\neq 0$ é possível garantir que existe uma única solução satisfazendo a equação, a saber $x=1$. Agora, no caso em que $a=0$, a equação $0\cdot x=0$ possuí infinitas soluções.

O último caso é um dos mais interessantes, pois estabelece uma relação entre potências e frações. Se fosse possível substituir $a=0$, teríamos que 0^0 dependeria do valor de $0/0$. No entanto, como vimos que não é possível definir $0/0$, certamente isso indica que não é possível definir 0^0.

3.2 SUGESTÃO DE ATIVIDADES

Apresentamos duas propostas de atividades que abordam as indeterminações $0/0$ e 0^0, considerando os conteúdos que são lecionados no Ensino Básico. Contudo, a dinâmica a ser utilizada para aplicação das atividades fica a cargo do professor.

Com relação à forma indeterminada 0/0, propomos a seguinte sequência de atividades, conforme mostrada no quadro 1:

Quadro 1: Sugestão de atividades para forma indeterminada $0/0$

DIVISÃO E FRAÇÕES		
1.	Quantos pedaços de bolo podem ser comprados com 12 reais, sabendo que cada pedaço custa 2 reais?	
2.	Se cada pedaço custar 4 reais, quantos pedaços seriam possíveis compram com a mesma quantidade de dinheiro do problema anterior?	
3.	Se eu gastei 12 reais na compra de 8 pedaços de bolo, quantos reais custava cada pedaço? Represente a resposta por meio de uma fração.	
4.	Seis esfirras foram repartidos em quatro pessoas. Qual foi a quantidade que cada pessoa comeu? Represente a resposta utilizando frações.	
5.	Compare as respostas da terceira e quarta questão. Elas são equivalentes? Como você fez para descobrir isso?	
6.	Quando duas frações são equivalentes? Como você fez para verificar que duas frações são equivalentes? Utilize de exemplos para auxiliar na sua explicação.	
7.	Considere que se pudesse ter a fração $0/0$.	
	a.	O que essa fração pode representar? (Dica: olhe para outras atividades que você já fez na lista e que precisou representar a resposta por uma fração).
	b.	Dê alguns exemplos de frações que poderiam ser equivalentes a ela.
	c.	As frações que você determinou, no item anterior, são todas equivalentes? Explique sua resposta.
	d.	A fração 0/0 pode representar uma quantidade fixa? Em caso afirmativo, indique essa quantidade. Do contrário, justifique sua resposta.

Fonte: Os autores, s.d.

As primeiras quatro atividades envolvem a ideia de representar o resultado de uma divisão (o quociente) através de frações. Embora que as primeiras duas questões apresentem um número inteiro como resultado, nas duas últimas surgirá resultados em decimais. Para direcionar ao que a atividade se propõe, é solicitado que as quantidades sejam representadas na forma fracionária, para que na quinta atividade sejam comparadas e se concluir se são frações equivalentes ou não.

Na sexta questão, é pedido para que o aluno explique como verificar que duas frações são equivalentes e utilize de exemplos para auxiliar na justificativa. Neste momento o professor pode chamar atenção deles e apresentar outra forma de determinar quando duas frações são equivalentes (caso nenhum aluno tenha a apresentado), que é a seguinte: considere as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$. Para verificar se elas são equivalentes, basta fazer

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ e } 4 \cdot 3 = 12.$$

Como os resultados coincidiram então elas são equivalentes. Se não fosse o caso, então elas não seriam equivalentes. Caso seja necessário, o professor pode realizar outros exemplos para que os alunos compreendam o algoritmo. Este critério será importante na última atividade.

Na sétima questão, inicia-se pedindo uma possível interpretação para o significado da fração $0/0$. É esperado que os alunos associem a fração como o resultado da divisão de 0 por 0. Na sequência é solicitado para determinar possíveis frações que poderiam ser equivalentes a ela. Neste momento é esperado que tentem utilizar o critério que acabaram de aprender. É pedido vários exemplos para garantir que tenham escolhido duas frações que não são equivalentes entre si, a fim de que percebam que a fração $0/0$ não representaria uma quantidade numérica fixa, que é uma conclusão esperada no último item da questão.

Para a forma indeterminada 0^0, planejamos a seguinte sequência de atividades, conforme apresentadas no quadro 2:

Quadro 2: Sugestão de atividades para forma indeterminada $\mathbf{0^0}$

POTÊNCIAS DE 0

1. Determine o valor da potência 0^n, de acordo com o valor de n solicitado.

n	0^n
1	
2	
4	
10	
1000	
n inteiro positivo	

2. Qual seria o valor de 0^n se $n=1/2$? E $n=2/3$? E se $n=\pi$? Ou então, $n=e$? Utilize uma calculadora para conferir os resultados.

3. Com base na atividade anterior, tente determinar qual o valor de $\mathbf{0^n}$ quando $\boldsymbol{n}$ é racional positivo qualquer. Após isso, determine quando for um número irracional positivo qualquer.

4. Utilize os resultados obtidos nos itens anteriores para esboçar o gráfico dos valores das potências de 0.

5. Observe o gráfico que acabou de construir. A partir dele, qual seria um possível valor para a potência 0^0? Justifique.

6. Calcule os valores de a^0 quando a for cada um dos valores solicitados abaixo.

a	a^0
1	
2	
π	
$-e$	
$2/3$	
9	
$a\neq 0$	

7. Com auxílio das respostas obtidas na questão anterior, construa o gráfico com os valores de a^0.

8. Observe o gráfico construído. Qual seria o possível valor de 0^0? Explique.

9. Compare os valores que você encontrou no item 5 com o do item 8. Esses valores são iguais ou diferentes? Conclua, utilizando suas palavras, se é possível determinar (ou não) um valor para 0^0.

Fonte: Os autores, s.d.

As primeiras quatro questões focam na determinação do valor da potência 0^x, com $x>0$. Na primeira, solicitamos determinar valores da potência quando o expoente é um inteiro positivo. Apesar de a definição impor a necessidade que se conheça o valor das potências $0^2,\ldots,0^{n-1}$ para determinar o valor de 0^n, é esperado que os alunos percebam que no caso em que a base é 0, isso não é necessário, pois como a potência pode ser enxergada como uma multiplicação do mesmo número repetidas vezes, vê-se que 0^n é um produto de zeros e como o produto de um número por 0 é 0, tem-se que $0^n = 0$. Caso seja necessário, o professor pode fazer outros exemplos para que os alunos percebam esse fato.

Nas duas questões seguintes, quer se saber o valor das potências de 0 quando o expoente é racional e irracional. Mais uma vez, caso o professor perceba que os alunos apresentem dificuldades para resolver essas questões, ele pode intervir, explicando um dos itens e fornecendo outros exemplos.

Por exemplo, vamos determinar o valor de $0^{\frac{1}{2}}$ e 0^{π}. No primeiro caso, segue da definição que $0^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0^1} = \sqrt[2]{0} = \sqrt{0}$.

Para determinar o valor de $\sqrt{0}$, é preciso lembrar que este é o número tal que é solução de $x^2=0$. Dessa forma, para que o produto de dois números seja igual a 0, necessariamente um destes deve ser igual 0, donde segue $x=0$, ou seja $0^{\frac{1}{2}} = 0$.

Para 0^{π}, como se trata de um expoente irracional, devem ser feitas aproximações via números racionais que são maiores e menores que π, conforme indicado na tabela 1.

Tabela 1: Aproximações para o valor de $\mathbf{0^{\pi}}$

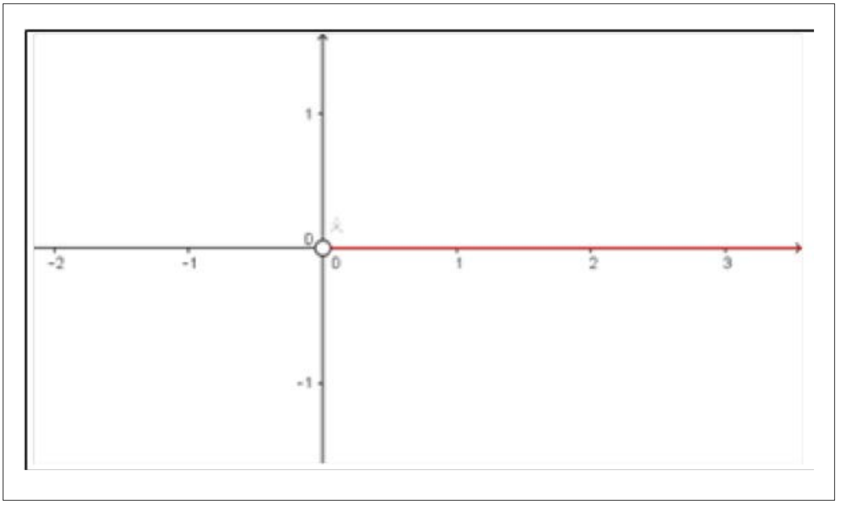
n	0^n	n	0^n
3	0	3.5	0
3.1	0	3.4	0
3.14	0	3.3	0
3.141	0	3.2	0
3.1415	0	3.15	0
3.14159	0	3.149	0
3.141592	0	3.148	0
3.1415926	0	3.147	0

Fonte: Os autores

A partir desses valores pode-se inferir que $0^{\pi}=0$. Assim, a partir desses exemplos, espera-se que os alunos percebam que $0^{n}=0$ para qualquer real positivo (seja ele racional ou irracional).

Na quarta questão é solicitado para seja construído o gráfico dos valores das potências de 0^{x}, o que equivalente a esboçar o gráfico da função $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, dada por $f(x)=0^{x}$. Um esboço do gráfico pode ser visto na figura 1.

Figura 1: Esboço do gráfico $\boldsymbol{f(x)=0^{x}}$

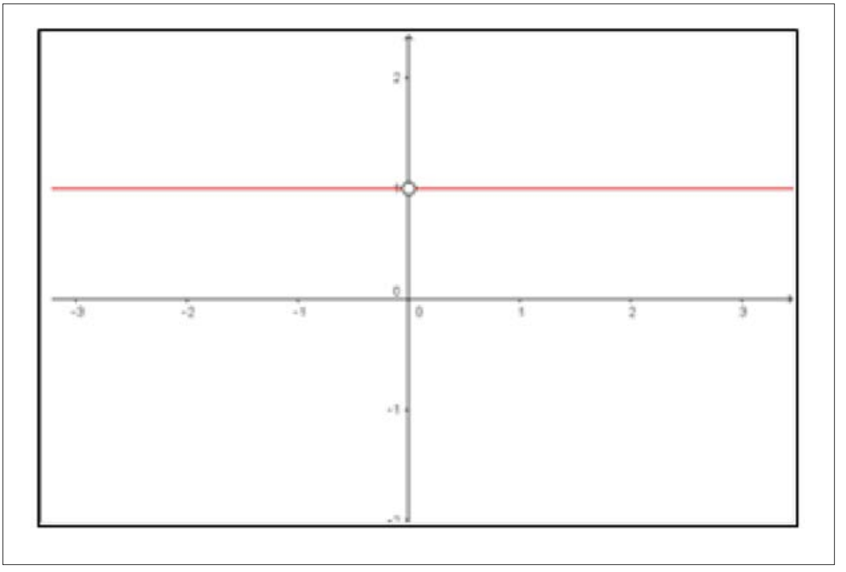


Fonte: Dos autores

A partir do gráfico é esperado que os alunos percebam que um possível valor para 0^{0} é 0. Com o propósito de concluir que 0^{0} é indeterminado, as próximas questões buscam apresentar outro possível valor.

A sexta questão retoma a definição de potências reais cujo expoente é 0. Como já apresentado na seção anterior, temos que para todo número $a\neq0$ se tem que $a^{0}=1$. Assim, ao plotar o gráfico desses valores, na questão seguinte, se obterá uma reta horizontal $y=1$ que não intersecta o eixo y, uma vez que não está definido o valor para $a=0$, como mostrado na figura 2.

Figura 2: Gráfico dos valores das potências a^0, com $a \neq 0$



Fonte: Dos autores

Assim como na quinta questão, os alunos devem utilizar o gráfico para novamente deduzir um possível valor para 0^0, que neste caso é esperado que respondam 1.

Por fim, a última questão tem objetivo de comparar esses valores obtidos para se concluir que não é possível fixar um valor para 0^0, visto que poderia ser tanto 0 como 1.

3.3 ROTEIRO

Além das atividades, desenvolvemos um roteiro de como o professor pode justificar as formas indeterminadas $0/0$ e 0^0 considerando apenas os conteúdos apresentados na Educação Básica. Contudo, antes de apresentar tal "demonstração", acreditamos que seja necessário definir o que vem a ser uma forma indeterminada. Considerando que no contexto da Educação Básica estas formas provêm de operações aritméticas, pode se dizer que uma expressão será considerada indeterminada quando puder assumir mais que um valor ao mesmo tempo e qualquer que seja o valor fixado sempre se podem chegar a alguma contradição aritmética.

Levando isso em consideração, pode-se apresentar a seguinte justificativa para forma $0/0$:

- Seja $a \neq 0$ e considere a fração $\frac{a}{a}$;
- Para encontrar frações equivalentes $\frac{n}{m}$, basta que satisfaça a seguinte relação $an=am$;
- Assim, tem-se que $an-am=0 \Rightarrow a(n-m)=0$;
- Logo $m=n$;
- Escolhendo $m=n=1$, temos que: $\frac{a}{a}=\frac{1}{1}=1$.
- Vamos supor que o processo possa ser aplicado para quando $a=0$. Então teríamos que $\frac{0}{0}=1$, pelo que acabamos de ver;
- Por outro lado, note que vale $a(n-m)=0$ sem necessariamente $n=m$;
- Escolhendo $n=1$, segue que: $\frac{0}{0}=\frac{m}{1}=m$
- onde m é um inteiro qualquer;
- Portanto, $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Apesar da indeterminação $0/0$ se tratar de uma divisão de 0 por 0, é possível representar o seu quociente como uma fração, o que explica termos escolhido as frações e suas propriedades para demonstrar tal indeterminação. Além disso, salientamos que a escolha $n=1$ foi apenas uma escolha conveniente, podendo ser escolhido outros valores de n natural, mostrando que $0/0$ é equivalente a qualquer fração, ou seja, qualquer quantidade numérica.

Agora, para o caso 0^0 apresentamos o seguinte roteiro:

- Digamos que $a^0 = x$, com $a \neq 0$;
- Note que $x = a^0 = a^{0 \cdot 2} = (a^0)^2 = x^2$;
- Então a^0 é uma solução da equação $x^2 = x$, ou equivalentemente, $x^2 - x = 0$;
- Podemos fatorar a equação, chegando a $x(x-1) = 0$;
- As soluções dessa equação devem ser $x = 0$ e $x = 1$. Assim, deve-se ter que $a^0 = 0$ ou $a^0 = 1$;
- Se $a^0 = 0$, então $a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = a \cdot 0 = 0$ o que não pode acontecer. Assim, a única alternativa é que $a^0 = 1$;
- No entanto, note que se pudéssemos aplicar o processo para $a = 0$, ambas as soluções seriam verdadeiras. Sendo assim, 00 pode ser 0 ou 1;
- Portanto 0^0 é uma indeterminação.

Além dessa ambiguidade de valores, é possível mostrar que 0^0 poderia assumir outros valores. De fato, observe que se fosse possível ter 00, então certamente valeria que:

$$0 = 0^1 = 0^{1+0} = 0^1 \cdot 0^0 = 0 \cdot 0^0,$$

indicando que qualquer que fosse o valor de 0^0, essa igualdade permaneceria sendo verdadeira, justificando o fato de 0^0 poder assumir qualquer valor.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração o exposto neste trabalho, acreditamos que é possível justificar as expressões indeterminadas do Cálculo que surgem na Educação Básica sem fazer menção a teoria de limites ou ferramentas do cálculo diferencial, utilizando apenas fatos elementares e que podem ser acessados pelos alunos, como por exemplo, nos livros didáticos. De maneira alguma, por outro lado, isso significa que o professor não possa recorrer a esses meios. Nesse cenário, acreditamos que os recursos tecnológicos e geométricos possam auxiliar na compreensão. Aliás, mencionamos que há trabalhos que fazem essa discussão, como, por exemplo, os que foram utilizados para referenciar este trabalho.

Como discutido, vimos que a expressão $\frac{0}{0}$ não representa uma fração, pois não pertence ao conjunto dos números racionais. Na tentativa de construir o conjunto dos números racionais incluindo frações cujo denominador são zero, são perdidas propriedades e condições para se obter um corpo. Além do mais, as frações do tipo $\frac{k}{0}$, com k inteiro não nulo, também exibem um comportamento anormal quando operados entre si.

Assim como, ao analisar a indeterminação 0^0, concluímos que necessariamente deve-se por $a^0=1$, quando $a\neq0$, para evitar contradições. Contudo, essas contradições não aparecem quando consideramos o caso em que $a=0$. Inclusive uma das justificativas mostrou uma relação entre potencias e frações, indicando que se $0/0$ estivesse definido, seria possível definir 0^0. Cabe chamar atenção para o fato que embora não possua valor fixo, para o desenvolvimento de alguns conceitos da matemática convenciona-se que $0^0=1$.

Ao tentar propor esses assuntos de uma maneira mais acessível para professores e alunos do Ensino Básico foram desenvolvidas algumas atividades para explicar de forma compreensível por quais motivos essas formas são indeterminadas. É importante frisar que tanto o roteiro quanto as atividades compõem um material desenvolvido para que o professor do ensino básico possa abordar essas questões na aula, podendo ser feitas adaptações e modificações, se for necessário.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, E. F. **A regra de L'Hôpital**: análise histórica da regra de l'hôpital – a importância da história da Matemática na disciplina de cálculo, 90. p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Computação Científica, Universidade de Campinas, Campinas, 2008.

DESANTI, D. M. **Indeterminações**. 80. p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

DOMINGUES, H. H.; IEZZY, G. **Álgebra moderna.** 4. ed. são Paulo: Atual, 2003.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da matemática elementar.** São Paulo: Atual, 2004, v.2.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

MARTINS, L. G. **Considerações a respeito das formas indeterminadas do cálculo para o ensino básico**. 95 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Toledo, 2021.

CAPÍTULO 8

EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL: RESOLUÇÃO ANALÍTICA E COMPUTACIONAL

Jocelaine Cargnelutti : jocelainecargne@utfpr.edu.br
Vanderlei Galina : vanderleigalina@utfpr.edu.br
Thais Paula Prunzel : thais_prunzel_2010@hotmail.com

O estudo de fenômenos de condução do calor representa uma área importante para as ciências exatas, devido às diversas situações que envolvem a transferência de energia térmica. Problemas que envolvem a difusão de calor podem ser descritos por uma equação diferencial parcial denominada equação do calor. As equações diferenciais possuem grande relevância para muitas áreas da ciência, da matemática e das engenharias, especialmente por apresentarem aplicações em diversos fenômenos do cotidiano. Além disso, o estudo sobre as equações diferenciais em problemas contextualizados permite uma aproximação entre a teoria e a prática, visto que muitos alunos dominam as técnicas de resolução analítica, mas têm dificuldades em solucionar problemas. Em particular, as equações diferenciais parciais constituem uma importante ferramenta para descrever situações reais por meio de um modelo matemático. Contudo, a resolução de uma equação diferencial parcial pode ser complexa, dificultando ou até mesmo impossibilitando a obtenção de soluções analíticas. Desta forma, é possível obter uma solução aproximada por meio da utilização de métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas (MDF). Deste modo, o objetivo deste trabalho, foi realizar um estudo acerca de um problema de fluxo de calor em uma haste fina, aplicando métodos de resolução analítica e numérica para obter a solução da equação diferencial parcial (EDP) que governa o problema de valor de contorno (PVC) analisado e, assim, realizar comparações entre os resultados encontrados. Frente às soluções obtidas, verificou-se a eficiência do método numérico ao comparar os resultados analíticos com os numéricos e constatar um baixo erro relativo entre eles.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre o fluxo de calor em uma haste fina, com o intuito de obter a modelagem matemática que representa o problema. Este problema que envolve a condução de calor em um sólido é descrito pela Equação do Calor unidimensional, da qual foi obtida a solução analítica pelo método de separação de variáveis e a solução numérica por meio do método das diferenças finitas (MDF). Para que o objetivo fosse alcançado, primeiramente realizou-se uma revisão bibliográfica sobre as equações diferenciais parciais, problemas de valor de contorno e os métodos de resolução analítico e numérico.

As equações diferenciais podem ser definidas como equações que contém derivadas e podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade. Em particular, quanto ao tipo, existem as equações diferenciais parciais (EDPs) que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes. Nesse sentido, observa-se grande variedade de aplicações em diversas áreas de conhecimento, como em ciências, engenharia, economia e até mesmo em psicologia, onde se deseja modelar o comportamento de algum fenômeno em termos matemáticos (ZILL; CULLEN, 2007).

Por sua vez, as equações diferenciais parciais são de grande importância para resolução de problemas mais amplos, especialmente fenômenos que envolvem a condução de calor. A equação diferencial que governa a condução de calor em sólidos é denominada Equação de Calor. No entanto, para determinar o fluxo de calor em uma barra, é preciso solucionar essa equação diferencial parcial sujeita à condições de contorno e à uma condição inicial (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Contudo, a resolução de uma equação diferencial parcial pode ser uma tarefa difícil. Por conta das condições de contorno impostas ao problema, a obtenção de uma solução exata por algum método analítico existente, torna-se muito complicada ou até mesmo impossível. Nestes casos, é possível encontrar uma solução aproximada obtida através da utilização de métodos numéricos (GALINA *et al.*, 2016; CARGNELUTTI *et al.*, 2017a; CARGNELUTTI *et al.*, 2017b; VIANA, 2018).

Dentre outros métodos numéricos, o método das diferenças finitas é largamente utilizado para obter uma aproximação da solução de problemas. Nesse método, é efetuado o processo de discretização do domínio considerado e a EDP é então transformada em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças finitas. O método numérico das diferenças finitas é facilmente executado em computadores para sistemas em que utiliza-se a discretização por uma malha uniforme, assim, são utilizados softwares como o *Scilab* para facilitar a resolução (CHAPRA; CANALE, 2008). O *Scilab* é um software livre de alto rendimento, com linguagem de programação mais simples e que pode ser utilizado para resolver cálculos de certa complexidade. Além disso, apresenta uma variedade de ferramentas e funções matemáticas (MAIA-AFONSO; DIAS, 2020).

Assim, neste trabalho, inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais e sobre problemas de valor de contorno. Também foi feito um estudo sobre os métodos analíticos e numéricos para resolução das EDPs, em particular, o método da separação de variáveis e o método das diferenças finitas. Por fim, fez-se um estudo da Equação do Calor onde foram obtidas a solução analítica e numérica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

De acordo com Boyce e DiPrima (2006), uma equação diferencial é uma lei, ou uma prescrição, que estabelece a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as taxas são derivadas e as relações são equações que regem o comportamento de algum processo físico.

Assim, uma equação diferencial relaciona determinada função com suas derivadas e para resolvê-la é necessário determinar a função que a satisfaz. Desta forma, segundo Zill e Cullen (2007), define-se:

Definição 2.1: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).

Existem fundamentalmente dois tipos de equações diferenciais, as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e as equações diferenciais parciais (EDPs). No entanto, para um estudo eficiente acerca das EDPs, é necessário dominar os conceitos e propriedades básicas das EDOs, pois, quando conveniente, para chegar à solução do problema, busca-se simplificar os cálculos transformando a EDP em uma ou mais equações diferenciais ordinárias (SILVA, 2016).

Segundo Boyce e DiPrima (2006), a classificação em EDO ou EDP diz respeito à quantidade de variáveis independentes envolvidas, ou seja, se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes.

Além da classificação quanto ao tipo, Zill e Cullen (2007) apontam que as equações diferenciais também podem ser classificadas de acordo com a ordem e a linearidade.

Na classificação quanto ao tipo, tem-se as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais parciais, que segundo Zill e Cullen (2007) podem ser definidas como:

Definição 2.2: Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Definição 2.3: Se uma equação envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de Equação diferencial Parcial (EDP).

De maneira geral, Boyce e DiPrima (2006), apontam que uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem com uma variável dependente y pode ser representada da forma:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

onde F é uma função de valores reais com $n + 2$ variáveis em que $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Além disso, quando se é possível explicitar a n-ésima derivada na equação (2.1), obtém-se a EDO:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2.2)$$

a qual é denominada de forma normal de F.

As equações diferenciais são classificadas também, quanto a sua linearidade. Assim, conforme Boyce e DiPrima (2006), uma equação diferencial do tipo (2.1) é dita linear se F é uma função linear das variáveis y, y', ..., yn. De maneira análoga, a definição é aplicada nas equações diferenciais parciais. Desse modo, a forma geral de uma EDO linear de ordem n é dada por:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \qquad (2.3)$$

Analisando a equação (2.3), Zill e Cullen (2007) apresentam as duas propriedades que caracterizam a linearidade de uma equação diferencial:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não satisfaz as condições anteriores é chamada de não linear.

É importante destacar que os métodos utilizados para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos em comparação com a teoria matemática para equações não lineares. Sendo assim, é favorável que os problemas que envolvem equações diferenciais não lineares sejam aproximados por equações lineares, processo este que recebe o nome de linearização (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Ao se deparar com problemas que envolvem equações diferenciais, tem-se como objetivo encontrar suas soluções. Desta forma, de acordo com Zill e Cullen (2007), tem-se:

Definição 2.4: Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.

Ou seja, a solução de uma EDO na forma da equação (2.2) é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é,

$$F\left(x, f(x), f^0(x), \ldots, f^n(x)\right) = 0 \qquad (2.4)$$

para todo x no intervalo I. Ressalta-se que o intervalo I, conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução, pode representar um intervalo aberto, fechado ou até mesmo infinito (ZILL, 2012).

As equações diferenciais podem admitir infinitas soluções, exatamente uma ou nenhuma solução. Em particular, quando resolve-se uma equação diferencial de ordem n, procura-se um número infinito de soluções correspondentes ao número ilimitado de opções dos parâmetros, formando assim uma família de soluções, na qual a função nula, chamada solução trivial, está inserida (ZILL, 2012).

Além disso, quando a equação diferencial não depende de parâmetros arbitrários, obtém-se uma solução particular, de modo que a solução geral é dada pelo conjunto de todas as soluções. Para encontrar uma solução particular, basta determinar valores específicos para os parâmetros na família de soluções (ZILL; CULLEN, 2007).

Uma equação diferencial que satisfaça determinadas condições auxiliares sobre a função incógnita e suas derivadas constituem problemas de valor inicial ou problemas de valor de contorno. Para encontrar a solução de problemas de valor inicial ou de contorno, é necessário determinar uma função que, simultaneamente, resolve a equação diferencial e satisfaz todas as condições auxiliares especificadas (BRONSON; COSTA, 2008).

De acordo com Zill (2012), um problema de valor inicial (PVI) é formado por uma equação diferencial e por condições auxiliares impostas a uma função desconhecida e suas derivadas em um ponto x_0. Assim, a equação diferencial (2.3), definida em algum intervalo I contendo x_0, quando sujeita às condições iniciais$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ especificadas no ponto $x0$, tem-se um PVI que pode ser expresso como:

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Para resolver um problema de valor inicial de ordem n da forma (2.5), é preciso determinar as constantes na família de soluções a n parâmetros da equação diferencial dada, por meio da aplicação das n condições iniciais de x0, resultando assim, na solução particular para algum intervalo I que contém o ponto inicial x_0 (ZILL, 2012).

Além disso, Zill (2012) enuncia um teorema que dá condições suficientes para a existência e a unicidade de soluções de um problema de valor inicia:

Teorema 2.5: Sejam $a_n(x)$, $a_n-1(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I e seja $an(x) \neq 0$ para todo x nesse intervalo. Se $x = x_0$ for um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ do PVI (2.5) nesse intervalo.

Um problema de valor de contorno (PVC) é um tipo de problema que envolve uma equação diferencial linear de segunda ordem ou superior, no qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes, sujeita à condições auxiliares denominadas condições de contorno (ZILL, 2012).

De acordo com Zill e Cullen (2007), um PVC composto por uma equação diferencial de ordem n sujeita a n condições de contorno é dado por:

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_1) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes reais. Um problema de valor de contorno na forma (2.6) pode ter muitas soluções, uma única ou nenhuma solução, mesmo quando as condições do Teorema de Existência e Unicidade (2.5) estiverem satisfeitas.

Os problemas de valor de contorno são tratados frequentemente para caracterizar sistemas de engenharia em que a variável tempo aparece, como por exemplo, a distribuição estacionária de temperatura em uma haste fina aquecida (CHAPRA; CANALE, 2008).

Com o propósito de determinar as soluções das EDOs, é imprescindível o estudo de alguns conceitos básicos sobre as EDOs lineares de ordem superior, os quais são expostos nesta seção.

Definição 2.6: Um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é dito linearmente dependente em um intervalo I, se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo. Caso contrário, se o conjunto de funções não é linearmente dependente no intervalo, esse conjunto é dito linearmente independente (ZILL, 2012).

Para verificar a independência linear das n soluções de uma EDO linear homogênea de ordem n, utiliza-se o chamado wronskiano das funções.

Definição 2.7: Considerando que $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes, então, o determinante,

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

é chamado de *Wronskiano* das funções.

Com base no *Wronskiano*, é estabelecido um teorema que proporciona condição suficiente para a independência linear de funções.

Teorema 2.8: O conjunto $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$de n soluções para a equação diferencial homogênea é linearmente independente em I se, e somente se, o wronskiano dessas funções for diferente de zero.

Quando consideram-se as soluções de uma EDO linear de n-ésima ordem homogênea, vale o princípio da superposição, conforme o Teorema (2.9), o qual determina que a soma de duas ou mais soluções é também uma solução.

Teorema 2.9: Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n-ésima ordem homogênea, em um intervalo I. Então, a combinação linear,

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x),$$

em que c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

A partir do Teorema (2.9), segue-se que um múltiplo $y = c_1 y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução. Além disso, uma EDO linear homogênea sempre possui uma solução trivial $y = 0$.

O conjunto de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo. Em um conjunto fundamental de soluções pode-se definir a solução geral da equação no intervalo I, a qual é dada por:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad (2.7)$$

em que os c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes arbitrárias (ZILL, 2012).

Quanto às EDOs lineares não-homogêneas, tem-se que qualquer função y_p, independente de parâmetros, que satisfaça a expressão (2.3), é chamada de solução particular para a equação. Assim, seja y_p uma solução qualquer para a equação não-homogênea (2.3) em um intervalo I e sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ um conjunto fundamental de soluções para a EDO homogênea associada no intervalo, então, a solução geral da equação em I é dada por:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) + y_p, \qquad (2.8)$$

onde $c_1, c_2, ..., c_n$ são constantes arbitrárias (ZILL, 2012).

A combinação linear $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) + y_p$ em (2.8) é chamada de função complementar para a EDO. Portanto, a solução geral para uma EDO linear não-homogênea é definida por:

$$y = y_c + y_p. \qquad (2.9)$$

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Como já exposto na seção (2.1), as equações diferenciais parciais (EDPs) são equações que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a duas ou mais variáveis independentes, ou seja, equações que contém as derivadas parciais de uma função de várias variáveis (ZILL; CULLEN, 2007).

Conforme Iório (2018), de maneira mais precisa, uma equação diferencial parcial que envolve a variável dependente u e n variáveis independentes $x^1, x^2, ..., x^n$, pode ser representada pelo simbolismo:

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \qquad (2.10)$$

onde F é uma função das variáveis indicadas e $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ é a função que se deve determinar.

É importante salientar que a classificação de EDPs quanto a ordem e a linearidade é análoga à classificação das equações diferenciais ordinárias. Desta maneira, a ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação, assim, a equação (2.10) pode ser classificada como uma equação diferencial parcial de ordem k (IÓRIO, 2018).

De acordo com Zill e Cullen (2009), a forma geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear, que envolve a variável dependente u e as variáveis independentes x e y, pode ser representada por:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G, \qquad (2.11)$$

onde os coeficientes $A, B, C, \ldots, G$ são constantes ou funções de x e y.

Quando o termo que não contém a variável dependente for igual a 0, ou seja, $G\ (x,y) = 0$, a equação (2.11) é dita de homogênea, caso contrário, não homogênea (ZILL; CULLEN, 2009).

Segundo Zill e Cullen (2009), para encontrar a solução de uma equação diferencial parcial linear da forma (2.11), é preciso determinar uma função $u(x,y)$ de duas variáveis independentes que possui todas as derivadas parciais ocorrendo na equação e que satisfaça a equação em alguma região do plano xy.

Neste trabalho, não serão abordados os procedimentos para obter soluções gerais de uma equação diferencial parcial linear, visto que a obtenção de soluções gerais para estes tipos de equações não é simples, e nem sempre é útil em aplicações. Desta forma, nossa intenção será explorar procedimentos para obtenção de soluções particulares de EDPs lineares (ZILL; CULLEN, 2009).

Durante os dois últimos séculos, foram desenvolvidos diversos métodos para se resolver equações diferenciais parciais. Dentre estes, o método de separação de variáveis é o método analítico mais antigo, tendo sido essencial nas investigações sobre ondas e vibrações feitas pelos matemáticos D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler em torno do ano de 1750 (COSTA; DIAS, 2018).

Apesar dos muitos métodos existentes, Zill e Cullen (2009) abordam o método da separação de variáveis para a obtenção de soluções particulares de uma EDP linear, método este que consiste em determinar uma solução particular que pode ser escrita como um produto entre uma função x e uma função y:

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \qquad (2.12)$$

Considerando esta afirmação, observa-se que em alguns casos é possível reduzir uma EDP linear que envolve duas variáveis independentes a duas EDOs, como ocorre em,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=XY'',$$

onde o apóstrofo representa uma diferenciação ordinária.

Contudo, a separação de variáveis não é considerado um método geral para obtenção de soluções particulares devido a existência de EDPs lineares que não são separáveis (ZILL; CULLEN, 2009).

Uma propriedade fundamental para o estudo das equações diferenciais parciais é o Princípio da Superposição, que baseia a aplicação do método da separação de variáveis de EDPs. Desta maneira, Zill e Cullen (2009) enunciam o seguinte teorema:

Teorema 2.10: (Princípio da superposição) Se $u_1, u_2, \dots, u_k$ forem soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, então a combinação linear,

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k,$$

onde c_i, $i = 1, 2, \dots, k$, são constantes, é também uma solução.

Além disso, sempre que tivermos um conjunto infinito $u_1, u_2, u_3, \dots$ de soluções de uma equação linear homogênea, podemos ainda construir outra solução u formando a série infinita,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \qquad (2.13)$$

onde c_k, $k = 1, 2, \dots$ são constantes (ZILL; CULLEN, 2009).

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear, com duas variáveis independentes de coeficientes constantes, pode ser classificada como hiperbólica, parabólica ou elíptica, dependendo apenas dos coeficientes das derivadas de segunda ordem. Assim, de acordo com Zill e Cullen (2009), considerando que ao menos um dos coeficientes A, B e C não seja zero, define-se,

Definição 2.11: A equação diferencial parcial de segunda ordem linear

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \qquad (2.14)$$

onde A, B, C, D, E e F e F são constantes reais, é dita ser hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$, parabólica se $B^2 - 4AC = 0$, elíptica se $B^2 - 4AC < 0$.

Desta forma, Siqueira (2019) aponta que a equação (2.14) é considerada elíptica quando as suas raízes são complexas, hiperbólica quando as raízes da equação são reais e distintas, e parabólica quando possui raízes reais e alguma é repetida.

2.3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

De acordo com Nascimento e Silva (2013), os métodos numéricos surgiram em virtude do avanço computacional, juntamente com essa necessidade de se obter soluções de questões cada vez mais complexas. A ideia principal destes métodos é a discretização, que reduz o problema contínuo, com um número infinito de variáveis, em um problema discreto, com um número finito de variáveis.

Por meio da aplicação de métodos numéricos objetiva-se, portanto, encontrar uma solução numérica próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir a diferença entre as duas soluções, de modo que o método seja considerado válido. Existem atualmente inúmeros métodos numéricos utilizados para a solução de problemas científicos, contudo, neste trabalho iremos evidenciar o chamado de Método das Diferenças Finitas (MDF) (SILVA, 2016).

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método largamente utilizado para encontrar soluções numéricas de EDPs, contudo, iremos inicialmente apresentar alguns desenvolvimentos com foco nas EDOs.

A ideia básica do método das diferenças finitas, de acordo com Lopes e Ruggiero (1996), consiste em aproximar as derivadas que aparecem na equação original por fórmulas de diferenças finitas que dependem apenas da função incógnita, gerando assim um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido pelos métodos existentes de resolução de sistemas.

No MDF, por meio do processo de discretização, o domínio contínuo da equação é substituído por uma malha de pontos, e assim baseia-se em resolver a equação diferencial somente em pontos discretos do domínio. Esse processo de discretização se dá pela subdivisão da área de interesse em pequenas regiões retangulares finitas com dimensões Δx e Δy previamente estabelecidas, onde a malha é gerada por meio da intersecção dessas regiões (VIANA, 2018).

Desta forma, segundo Lopes e Ruggiero (1996), para aplicação do método considera-se um intervalo de solução $[a, b]$, em que $a = x_0$ e $b = x_n$, então divide-se o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de comprimento $h = (b - a)/n$ cada. A partir dessa subdivisão do intervalo contínuo, faz-se a discretização do domínio, e assim pode-se definir os demais pontos x_k pertencentes ao domínio discreto e aproximar os valores de y_k por,

$$x_k = x_0 + kh,\ k = 0,1,2,\dots,(n-1), \qquad (2.15)$$

$$y_k \simeq y(x_k) = y(x_0 + kh), \ \ k = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (2.16)$$

As aproximações por meio de diferenças finitas mais utilizadas para as derivadas de primeira ordem no ponto x_i, são as diferenças centrada (2.17), progressiva (2.18) e regressiva (2.19), indicadas respectivamente pelas equações,

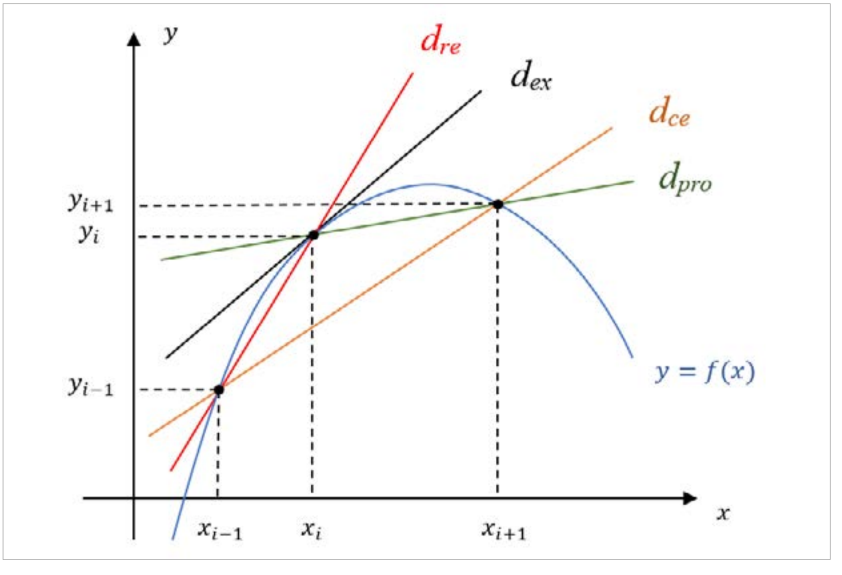
$$y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad (2.17)$$

$$y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \qquad (2.18)$$

$$y'(x_i) \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \qquad (2.19)$$

Do ponto de vista geométrico, estas aproximações por meio de diferenças finitas centrada, progressiva e regressiva podem ser verificadas na Figura 1, onde estão sendo ilustradas juntamente com a derivada exata no ponto x_i.

Figura 1: Aproximações da derivada por meio de diferenças progressiva (d_{pro}), centrada (d_{ce}) e regressiva d_{re} juntamente com a derivada exata (d_{ex}) da função $f(x)$.



Fonte: Os autores (2021).

Quando utilizamos essas diferenças finitas para aproximar as derivadas, um erro é cometido. Deste modo, utilizando a série de Taylor é possível expandir essas diferenças para medir o erro cometido (LOPES; RUGGIERO, 1996).

De acordo com Guidorizzi (2001), dada uma função $y(x)$ derivável até a ordem n no intervalo $I = [a, b]$, em que x_i pertence a I, é possível aproximar y pelo polinômio de Taylor, de modo que o polinômio de n-ésima ordem de y em volta de x_i é dado por,

$$P_n(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n. \quad (2.20)$$

Sendo assim, o polinômio (2.20) é uma função aproximada de y em volta do ponto x_i, em que $p_1(x) \approx y(x)$ é uma aproximação linear, $p_2(x) \approx y(x)$ é uma aproximação quadrática, $p_3(x) \approx y(x)$ é cúbica, dentre outros.

Conforme Lopes e Ruggiero (1996), com a finalidade de medir o erro local cometido ao utilizar a aproximação por diferenças, considera-se um ponto ξ_x entre x e x_i tal que a fórmula de Taylor pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_i)^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, para $n = 1$ a equação (2.21) é descrita da forma,

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(\xi_x)}{2}(x - x_i)^2,$$

e, no ponto $x = x_{i+1} = x_i + h$, a equação é dada por,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)^2.$$

Ao substituir $x_{i+1} - x_i = h$ na equação e isolar $y'(x_i)$, obtém-se a derivada primeira,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi_{i+1}),$$

em que o último termo representa o erro estimado ao realizar uma aproximação da derivada primeira pela diferença progressiva, erro esse da ordem de h. Então, aproximando os valores exatos $y(x_{i+1})$ e $y(x_i)$ por y_{i+1} e y_i, respectivamente, tem-se,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \qquad (2.22)$$

De forma análoga, é possível constatar que o erro cometido ao utilizar a diferença regressiva é também da ordem de h. Com o intuito de dimensionar o erro cometido ao utilizar a diferença centrada, considera-se $n = 2$ na expressão (2.21), obtendo assim a derivada primeira que pode ser aproximada pela expressão,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \qquad (2.23)$$

De acordo com Lopes e Ruggiero (1996), o erro na fórmula de diferença centrada é da ordem de h^2 e, como $h < 1$, esta fórmula é mais precisa que as outras duas e, por esta razão, ela é a mais empregada.

Utilizando novamente a série de Taylor, é possível deduzir também uma aproximação para a derivada segunda, bem como a expressão para o erro cometido. Para tanto, considera-se $n = 3$ na equação (2.21) e utilizam-se os pontos x_{i+1} e x_{i-1}. Assim, a aproximação da derivada segunda é dada pela expressão,

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \qquad (2.24)$$

com erro na ordem de h^2.

3. ESTUDO DE CASO

3.1 EQUAÇÃO DO CALOR

De acordo com Çengel e Ghajar (2012), o calor é a energia térmica que pode ser transferida de um sistema para outro devido a diferença de temperatura entre eles. Logo, sempre que existir uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios, haverá, necessariamente, transferência de calor. De forma geral, a condução do calor em um meio é tridimensional, dependente do tempo e da temperatura do meio. Desse modo, os problemas de transferência de calor podem ser classificados como permanentes ou transientes. O termo permanente implica que a temperatura não varia em nenhum ponto no meio ao longo do tempo, enquanto transiente implica variação com dependência do tempo (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

3.2 CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

A Equação do Calor é uma equação clássica da física matemática associada à teoria do fluxo de calor, isto é, calor transferido por condução em um meio. Ela pode ser aplicada desde os casos mais simples, como para determinar a variação de temperatura em uma haste fina, até a condução transiente e multidimensional em geometrias complexas.

A equação do calor unidimensional envolve duas variáveis independentes x e t e uma variável dependente $u\ (x, t)$, sendo representada da forma,

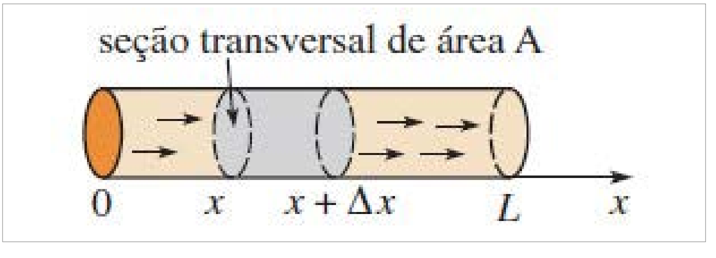
$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\ \ k>0. \tag{3.1}$$

A equação do calor é uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem linear, em que a variável x representa uma dimensão espacial, t representa o tempo e a função $u\ (x, t)$ é a temperatura.

Considera-se uma haste circular fina de comprimento L, cuja seção transversal tem área A, feita de um material condutor uniforme de calor tal que coincida com o eixo x no intervalo $[0, L]$, conforme a Figura 2.

Suponhamos que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo a não permitir, através dela, transferências de calor com o meio ambiente. Logo, a uniformidade do material e o isolamento térmico lateral implicam que o fluxo de calor no interior da haste se dê somente na direção x, e, portanto, tem-se um problema de condução do calor em uma única dimensão (FIGUEIREDO, 1977).

Figura 2 – Fluxo de calor unidimensional



Fonte: Zill e Cullen (2009).

Considera-se também que a haste é homogênea, isto é, a sua massa por unidade de volume, densidade ρ , é uma constante, além de que o calor específic o γ e a condutividade térmica K do material da haste são constantes (ZILL; CULLEN, 2009).Desta forma, conforme Zill e Cullen (2009), ao considerar uma haste fina de comprimento L com uma temperatura inicial $f(x)$ por toda a haste e cujas as extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $t > 0$, o problema da condução do calor consiste em determinar a temperatura $u\,(x,t)$ na haste a partir do problema de valor de contorno dado por,

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases} \tag{3.2}$$

3.3 RESOLUÇÃO ANALÍTICA

O problema fundamental de condução de calor é encontrar uma solução $u\,(x,t)$ que satisfaz a equação diferencial (3.1) para $0 < x < L$ 0 e $t > 0$, sujeita às condições inicial e de contorno as quais a haste fina está submetida. Desse modo, para obter a solução analítica do problema de valor de contorno (3.2) será utilizado o método da separação de variáveis, que consiste em usar a separação de variáveis para determinar uma solução particular do problema.

Ao verificar que a variável u só aparece na primeira potência em toda equação, tem-se que o problema de condução de calor é linear. Além disso, a EDP e as condições de contorno são, também, homogêneas. Isso sugere que é possível abordar o problema buscando soluções da equação diferencial e das condições de contorno, fazendo depois uma superposição para satisfazer a condição inicial (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Pretende-se buscar outras soluções, não-nulas, para o PVC (3.2), por meio da hipótese de que $u\,(x,t)$ é um produto de duas outras funções, uma dependente apenas de x e a outra dependente apenas de t, ou seja, procura-se soluções do problema na forma,

$$kX''T = XT', \tag{3.3}$$

Substituindo u dada em (3.3) na equação do calor (3.1), obtém-se,

$$kX''T = XT', \tag{3.4}$$

em que a linha se refere à diferenciação usual em relação à variável independente, seja ela x ou t. A equação (3.4) é equivalente a,

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{k}\frac{T'}{T}, \qquad (3.5)$$

em que as variáveis estão separadas, isto é, a expressão à esquerda da igualdade depende somente de x e a expressão à direita depende apenas de t.

Para que a equação dada em (3.5) seja válida para $0<x<L\ 0$ e $t<0$, é necessário que ambos os lados sejam iguais à mesm a constante. Caso contrário, se uma variável independente fosse mantida fixa e se fosse permitida que a outra variasse, um dos lados da equação permaneceria constante enquanto o outro estaria variando, violando, portanto, a igualdade (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Desse modo, ao denotar essa constante de separação por $-\lambda$, então a equação (3.5) fica,

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{k}\frac{T'}{T}=-\lambda. \qquad (3.6)$$

Considera-se a constante de separação por $-\lambda$, em vez de λ, pois essa constante será negativa e é conveniente exibir o sinal de menos explicitamente.

A partir da expressão (3.6), obtemos duas equações diferenciais ordinárias para $X(x)$ e $T(t)$, sendo elas,

$$X''+\lambda X=0, \qquad (3.7)$$

$$T'+k\lambda T=0. \qquad (3.8)$$

Cada uma dessas equações pode ser resolvida imediatamente para qualquer valor de λ, o que implica que o produto de duas soluções das equações (3.7) e (3.8), respectivamente, fornece uma solução para a equação diferencial parcial (3.1). Contudo, buscamos apenas as soluções da equação do calor que satisfaçam, também, as condições de contorno, restringindo assim os valores possíveis para λ.

Substituindo $u(x,t)$ dada pela equação (3.3) na condição de contorno em $x=0$, obtém-se,

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0. \qquad (3.9)$$

Analisando a equação (3.9), tem-se que $X(0) = 0$ ou $T(t) = 0$. Se a equação fosse satisfeita escolhendo-se $T(t)$ como sendo zero para todo t, então $u\ (x,t)$ seria zero para todo x e t, mas essa possibilidade já foi rejeitada. Portanto, a equação deve ser satisfeita impondo-se a condição,

$$X(0) = 0. \qquad (3.10)$$

De forma semelhante, a condição de contorno em $x = L$ implica que,

$$X(L) = 0. \qquad (3.11)$$

Considerando a EDO homogênea (3.7) sujeita às condições de contorno homogêneas (3.10) e (3.11), tem-se a formação do problema de Sturm-Liouville regular,

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0. \qquad (3.12)$$

Para fazer a resolução do PVC em (3.12), de acordo com Zill e Cullen (2009), consideram-se três casos possíveis para o parâmetro λ : zero, negativo e positivo. Portanto, uma solução do problema de condução de calor (3.2) é indicada pela série infinita,

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x. \qquad (3.13)$$

Destaca-se que o método da separação de variáveis produz um candidato para a solução da EDP, podendo existir outras soluções que não foram consideradas pelo método. No entanto, Iório (2018) prova em seu livro a unicidade dos problemas envolvendo a equação de calor a uma dimensão. Deste modo, o problema (3.2) tem, de fato, uma única solução, sendo a função indicada em (3.13).

Sendo assim, ao considerar uma haste fina de comprimento $L = \pi$ com temperatura inicial $u\ (x\ ,0)\ = 100$ por toda a haste e difusividade térmica $k = 1$, cujas extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $t\ > 0$, tem-se que a temperatura $u\ (x,t)$ na haste, com $0 < x < \pi$, é determinada a partir do PVC dado por,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ &u(0,t) = 0 \\ &u(\pi,t) = 0 \\ &u(x,0) = 100. \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Desta forma, verifica-se que os coeficientes A_n para a solução do problema de valor de contorno (3.14) são definidos por,

$$A_n = \frac{200}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]. \tag{3.15}$$

E, portanto, conforme a solução geral apresentada em (3.13), a solução analítica $u\,(x,t)$ do PVC (3.14) é indicada pela série infinita,

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]e^{-n^2 t}\,\mathrm{sen}(nx). \tag{3.16}$$

3.4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução numérica da Equação do Calor será obtida por meio do Método das Diferenças Finitas, cuja ideia básica consiste em aproximar as derivadas presentes na equação por expressões de diferenças finitas. Além do mais, neste método numérico, o domínio contínuo da equação é substituído por uma malha de pontos, por meio de um processo de discretização.

Para obter a solução numérica do PVC do calor (3.2), em vez de trabalhar com a região semi-infinita no plano xt definida pelos intervalos $0 \le x \le L$ e $t \ge 0$, será utilizada a região retangular definida por $0 \le x \le L$ e, onde T é algum valor específico de tempo. Sobre essa região, posiciona-se uma malha retangular constituída por retas verticais espaçadas por h, unidades e retas horizontais afastadas h_t unidades entre si.

Desta forma, ao escolher quaisquer dois inteiros positivos n e m, obtém-se,

$$h_x = \frac{L}{n} \text{ e } h_t = \frac{T}{m},$$

então as retas verticais e horizontais da malha são definidas por,

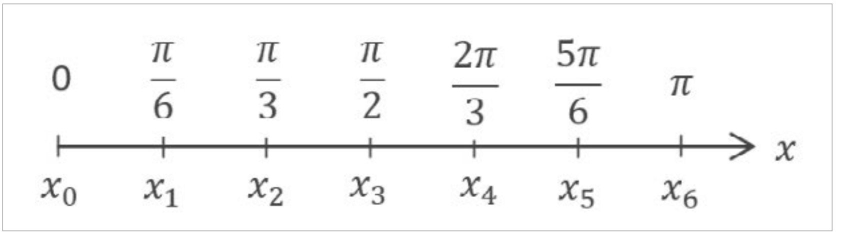
$$x_i = ih_x,\ i = 0,1,2,\ldots,n \text{ e } t_j = jh_t,\ j = 0,1,2,\ldots,m.$$

Inicialmente, objetiva-se obter a solução numérica do PVC (3.14), desta forma, considera-se uma haste fina de comprimento $L = \pi$ com temperatura inicial $u(x,0) = 100$ por toda a haste e difusividade térmica $k = 1$, cujas as extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $0 \leq t \leq 6$, assim a temperatura $u(x,t)$ na haste, com $0 \leq x \leq \pi$, é determinada a partir do PVC,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ &u(0,t) = 0 \\ &u(\pi,t) = 0 \\ &u(x,0) = 100. \end{aligned} \qquad (3.17)$$

A primeira etapa da aplicação do MDF consiste em definir o domínio discreto onde a solução será buscada, em particular, para o caso apresentado anteriormente, tem-se uma região retangular definida por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq t \leq 6$. Para discretizar o domínio, a princípio divide-se o intervalo $[0,\pi]$ em $n = 6$ subintervalos igualmente espaçados, em que cada subintervalo tem comprimento $h_x = (\pi - 0)/6 = \pi/6$. A Figura 3 apresenta a malha unidimensional para quando $n = 6$.

Figura 3: Malha unidimensional quando n = 6



Fonte: Os autores (2021).

Para definir o espaçamento h_t, adota-se a relação,

$$\lambda = \frac{k\,h_t}{h_x^2}, \qquad (3.18)$$

em que $k > 0$ é a constante de difusividade térmica. Esta relação vem da discretização da equação do calor pelo MDF. Como condição de estabilidade do método numérico, é necessário que $\lambda < 1/2$, caso contrário o método é considerado instável, isto é, quando os erros de arredondamento ou qualquer outro erro crescem muito rapidamente com a realização dos cálculos (ZILL; CULLEN, 2009). Sendo assim, admitindo $\lambda < 1/4$ obtém-se que,

$$h_t = \frac{\lambda h_x^2}{k} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1} = \frac{\pi^2}{144} \approx 0{,}068539. \tag{3.19}$$

Portanto, sobre a região definida por $0 \le x \le \pi$ e $0 \le t \le 6$, posiciona-se uma malha retangular formada por retas verticais espaçadas por $h_x = \pi/6$ unidades e retas horizontais afastadas $h_t = \pi^2/144$ unidades entre si, ou seja, as retas verticais e horizontais são definidas por,

$$x_i = \frac{\pi}{6} i, i = 0,1,2, \ldots,6$$
$$t_j = \frac{\pi^2}{144} j, j = 0,1,2, \ldots,88.$$

Para aproximar a solução $u(x,t)$ da equação do calor unidimensional (3.1), devemos substituir as derivadas por quocientes de diferenças. Em particular, requer aproximações para a derivada segunda na variável espacial e para derivada primeira na variável tempo. Deste modo, utiliza-se a aproximação por diferença central de segunda ordem na variável espacial, dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h_t}[u(x,t+h_t) - u(x,t)]. \tag{3.20}$$

e, a aproximação por diferença progressiva de primeira ordem na variável tempo, expressa da forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h_t}[u(x,t+h_t) - u(x,t)]. \tag{3.21}$$

Com isso, substituindo as aproximações (3.20) e (3.21) na EDP do calor (3.1), obtém-se a equação,

$$\frac{k}{h_x^2}[u(x+h_x,t) - 2u(x,t) + u(x-h_x,t)] = \frac{1}{h_t}[u(x,t+h_t) - u(x,t)], \tag{3.22}$$

ou ainda, adotando as simplificações $u(x,t) = u_{ij}$, $u(x+h_x,t) = u_{i+1,j}$, $u(x-h_x,t) = u_{i-1,j}$ e $u(x,t+h_t) = u_{i,j+1}$, obtém-se a equação discretizada,

$$\frac{k\,h_t}{h_x^2}[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}] = u_{i,j+1} - u_{ij}, \tag{3.23}$$

a qual, considerando a relação $\lambda = kh_t/h_x^2$ e isolando o termo $u_{i,j+1}$, pode ser reescrita como,

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}. \quad (3.24)$$

A equação (3.24) pode ser escrita para todos os nós interiores da barra. Ela então fornece um meio explícito de calcular valores em cada nó para um instante futuro baseado nos valores atuais do nó e em seus vizinhos.

De acordo com Lopes e Ruggiero (1996), o erro pode ser expresso como erro absoluto E_a, obtido pela diferença entre o valor analítico x e o valor aproximado $\bar{x}$, isto é, $E_a = |x - \bar{x}|$. Contudo, por vezes o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão do cálculo, então utiliza-se o erro relativo E_r, que considera a ordem de grandeza dos números envolvidos e é definido por,

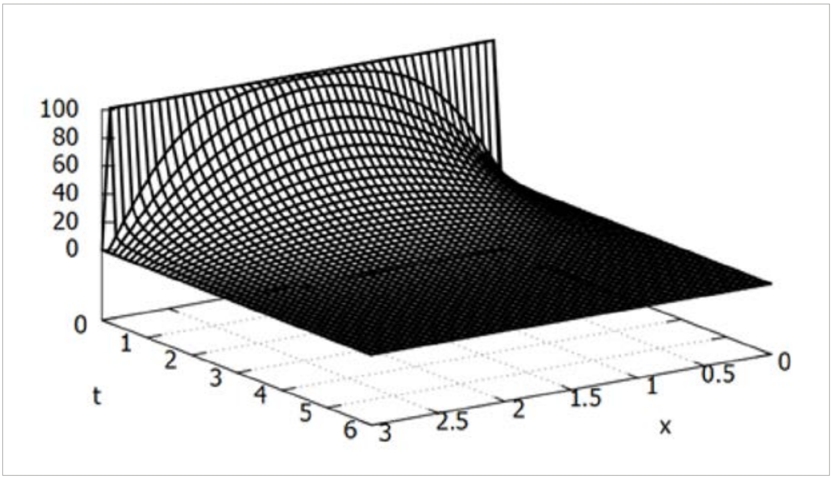
$$Er = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}. \quad (3.25)$$

Quanto à solução numérica, foi realizada a implementação computacional da equação (3.24) por meio de um código desenvolvido no software *Scilab*. O *Scilab* é um software livre de alto rendimento com linguagem de programação simples, que apresenta uma variedade de funções matemáticas e ferramentas que proporcionam a resolução de cálculos de certa complexidade.

Os valores resultantes da simulação numérica foram escritos em arquivo, para que fossem utilizados na análise gráfica. Os gráficos em $3D$ e em $2D$ foram construídos pelo software livre *Gnuplot*. O problema de valor de contorno (3.17) também foi resolvido para $n = 100$ subintervalos, assim, tem-se que $h_x = 0{,}031416$ e, admitindo $\lambda = 0{,}5$, tem-se que $h_t = 0{,}0004935$, ou seja, $m = 12159$ subintervalos no eixo t.

Desta forma, a Figura 4 apresenta o gráfico $3D$ da temperatura ao longo da barra com o passar do tempo quando $n = 100$. Como já era esperado, o aumento do número de nós da malha gera uma aproximação cada vez melhor, assim, se verifica com maior intensidade o princípio da condução do calor.

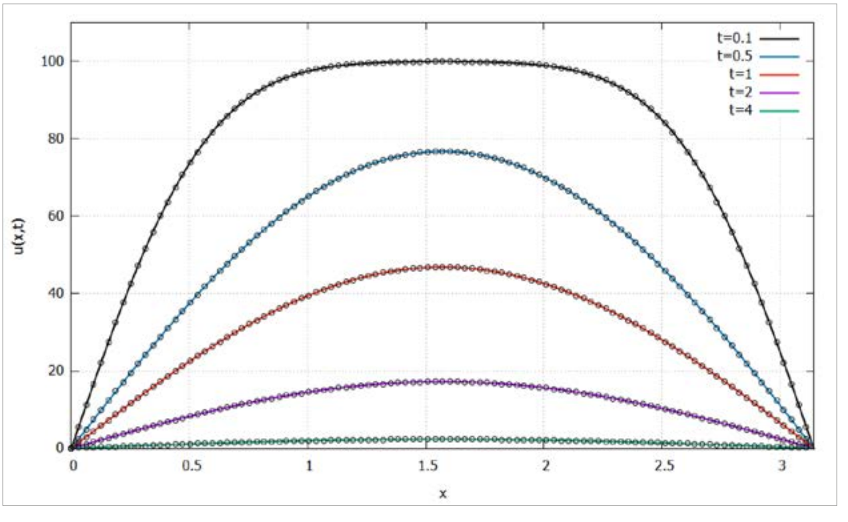
Figura 4: Temperatura $u(x,t)$ ao longo da barra no decorrer do tempo com $n = 100$



Fonte: Os autores (2021).

Alternativamente, com o auxílio da aplicação de gráficos $2D$, obtém-se a solução $u(x,t)$ como uma função de x para vários tempos fixos e como uma função de t para várias posições fixas na haste. O gráfico exposto na Figura 5 mostra a variação da temperatura no comprimento da barra para os tempos fixos de $t = 0{,}1$, $t = 0{,}5$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 4$.

Figura 5: Variação da temperatura ao longo da barra com t fixo quando $n = 100$.



Fonte: Os autores (2021).

A excelente concordância das soluções analítica e numérica ilustrada na Figura 5 é confirmada pelo baixo erro relativo obtido. A Tabela 1 apresenta estes resultados para alguns instantes fixos do tempo.

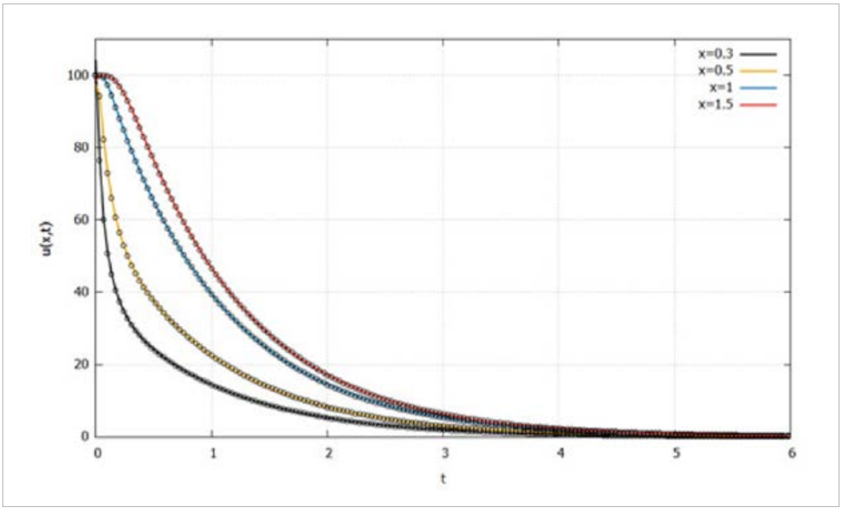
Tabela 1: Erro relativo (Er) obtido para diferentes instantes de tempo, com $n = 100$

Instante de tempo	Er (%)
0,1	0,2858
0,5	0,0576
1,0	0,0499
2,0	0,0658
4,0	0,0987

Fonte: Os autores (2021).

Já a Figura 6, apresenta o gráfico da variação da temperatura no decorrer do tempo para os comprimentos fixos de $x = 0{,}3$, $x = 0{,}5$, $x = 1$ e $x = 1{,}5$. Novamente tem-se uma excelente concordância das soluções analítica e numérica ilustrada na Figura 6, que é confirmada pelo baixo erro relativo obtido. A Tabela 2 apresenta estes resultados em algumas posições fixas na haste.

Figura 6: Variação da temperatura no decorrer do tempo com x fixo quando $n = 100$



Fonte: Os autores (2021).

Tabela 2: Erro relativo (Er) obtido em diferentes posições na haste, com $n = 100$

Posição fixa da haste	Er (%)
0,3	0,2927
0,5	0,1619
1,0	0,1311
1,5	0,1311

Fonte: Os autores (2021).

Comparando-se os resultados obtidos, observa-se que o Método das Diferenças Finitas obteve excelente concordância da solução numérica com a solução analítica da equação do calor unidimensional. O método se mostra muito útil para obtenção da resolução de PVCs, principalmente onde não se tem uma solução analítica ou nos casos em que a solução analítica é difícil de se obter.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que o MDF mostrou-se eficaz na simulação da condução de calor unidimensional em uma haste fina, pois aproximou de forma satisfatória o resultado numérico do analítico. No que tange os estudos realizados ao longo da construção desse trabalho, verifica-se que este viabilizou um grande enriquecimento acadêmico ao propiciar um aprofundamento dos conhecimentos relativos às equações diferenciais e aos Problemas de Valor de Contorno, além de possibilitar um estudo significativo acerca dos problemas de condução de calor em sólidos. Permitiu-se, também, a aplicação de um método numérico aliado ao software *Scilab* para simulação de um problema representado por uma equação diferencial parcial e a comparação dos resultados obtidos analítica e computacionalmente.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 8. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2006.

BRONSON, R.; COSTA, G. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

CARGNELUTTI, J.; GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulation of the two-dimensional flow of the initiation channel of the itaipu hydroelectric power plant by the lattice boltzmann method. **Revista Internacional deMétodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 34, p. 1, 2017.

CARGNELUTTI, J.; GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Two-dimensional numerical simulation of channel flow with submerged obstacles using the lattice boltzmann method. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 34, p. 1, 2017.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. São Paulo SP: McGraw-Hill, 2008.

COSTA, J. F.; DIAS, D. G. Equação do calor: uma comparação entre soluções analítica e computacional para uma barra de cobre finita e isolada termicamente. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 4, n. 1, p. 27–37, 2018.

ÇENGEL, Y.; GHAJAR, A. J. **Transferência de calor e massa**: uma abordagem prática. 4. ed. Porto Alegre - RS: AMGH, 2012.

FIGUEIREDO, D. G. de. *A***nálise de Fourier e equações diferenciais parciais**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann. *In*: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. **I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. Curitiba - Brasil, 2016.

GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Application of lattice boltzmann method for surface runoff in watershed. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 34, p. 1, 2017.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. [*S.l.*: *s.n.*], 2001. v. 1.

IÓRIO, V. D. M. **EDP, Um Curso de Graduação**. 4. ed. [*S.l.*]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

LOPES, V. L. D. R.; RUGGIERO, M. A. G. **Cálculo numérico-aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

MAIA-AFONSO, R. J.; DIAS, L. V. O uso do software scilab como ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina de métodos numéricos nos cursos de engenharias. **Journal of Exact Sciences - JES**, n. 01, 2020.

NASCIMENTO, J. d. S. M. do; SILVA, T. da. **Método de diferenças finitas**: aplicação na equação do calor. Amapá: Universidade Federal do Amapá, 2013.

SILVA, M. C. D. d. **Equações diferenciais parciais e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Pontífica Universidade Católica - PUC, 2016.

SIQUEIRA, B. A. **Discretização de equações diferenciais utilizando diferenças finitas**: uma abordagem na equação do calor. Blumenau, SC, 2019.

THOMAS, L. R. **O uso de equaçoes diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros**. Universidade de Brasília - UnB Planaltina, 2013.

VIANA, H. S. **Método das Diferenças Finitas aplicado a um problema de condução do calor em estado estacionário**. Castanhal - PA, 2018. Trabalho de Conclusão de Curso.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicação em modelagem**. São Paulo - SP: Cengage Learnig, 2012.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 2007. v. 1.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Matemática Avançada para Engenharia**. 3. ed. Porto Alegre:Bookman, 2009. v. 3.

CAPÍTULO 9

COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON E HALLEY NA DETERMINAÇÃO DE APROXIMAÇÕES PARA O NÚMERO DE OURO

Gustavo Henrique Dalposso: gustavodalposso@utfpr.edu.br
Fúlvio Natércio Feiber: ffeiber@utfpr.edu.br
Daniela Trentin Nava: dnava@utfpr.edu.br
Márcio Paulo de Oliveira: marciooliveira@utfpr.edu.br

Ao iniciar este capítulo, fazemos uma pergunta ao leitor, o que pode ter um número irracional de tão interessante ou mesmo mágico, para que gregos antigos, artistas renascentistas, astrônomos, arquitetos e até mesmo um romancista do século 21 tenham sido atraídos por ele?

Estamos nos referindo a um número conhecido por vários nomes, e caso o leitor já esteja pensando, sim se trata do número de ouro 1,6180339..., denotado pela letra grega φ, mas que atende também pelos nomes: Razão Áurea, Número Áureo, Proporção Áurea, Razão Áurea, Secção Áurea, Proporção Divina e Secção Divina. Este já era conhecido por Euclides (por volta de 300 a.C.) que o descreveu na obra “Elementos”, salientado em 1509 em “De Divina Proporcione” por Luca Pacioli e por Johannes Keppler por volta de 1600 e coroado novamente na obra de “O código Da Vinci” do romancista Dan Brown em 2003.

Uma possível resposta talvez seja o fato de a razão áurea possuir propriedades matemáticas únicas e estar presente em toda a natureza.

Existem aplicações de seu uso em artes, arquitetura e design, além de alguns *insights* para a espiritualidade cotidiana uma vez que ele se apresenta frequentemente em diversos fenômenos, como no rosto e corpo humanos e na natureza. Como se pode notar, trata-se de um número bastante curioso. Trataremos neste capítulo de algumas de suas propriedades Matemáticas com vistas à métodos iterativos e algumas de suas aplicações na Arquitetura.

Diferentemente do número $\pi = 3{,}1415\ldots$ em que os alunos aprendem à exaustão nas escolas, o número $\varphi = 1{,}618\ldots$ não é tão expressivamente ensinado. Motivado pelo fato de que mais do que uma simples razão numérica, o número áureo possui um quê de misterioso que leva à uma conotação espiritual. A Razão Áurea resulta quando uma linha é dividida de uma maneira muito especial e única. A saber, suponha que lhe pedissem para pegar um barbante e cortá-lo. Há vários lugares onde você pode cortá-lo, e cada lugar resultaria em proporções diferentes para o comprimento do pedaço pequeno para o pedaço grande e do pedaço grande para a corda inteira, entretanto, há um único ponto, em que a proporção da peça maior para a menor é exatamente a mesma que a proporção da corda inteira para a peça maior e, nesse ponto, a Razão Áurea de ambas é de $1{,}618$ para 1, ou φ.

O apelativo deste número é que ele é uma proporção que aparece em toda a criação e pode ser verificado amplamente no rosto e no corpo humanos. É encontrado nas proporções de muitos outros animais, nas plantas, no sistema solar e até mesmo nos movimentos de preço e tempo das bolsas de valores e câmbio de moeda estrangeira. Seu apreço, portanto, varia de matemáticos a médicos, naturalistas, artistas, investidores e até mesmo místicos. Além de disso, a singularidade do φ é que ele pode ser derivado de muitas outras maneiras além deu exercício de segmentar uma linha.

Por ter diversos exemplos de sua presença em fenômenos que envolvem a ordem de crescimento na natureza, o número de ouro ganhou um status de "ideal", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. O fato de ser apoiado pela matemática é que o torna ainda mais fascinante.

A sequência de números de Fibonacci $\{F_i\}$ é definida pela recorrência $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, com $F_0=0$ e $F_1=1$. O número de ouro está relacionado com a sequência de Fibonacci (SETZER, 2020), em que a razão da sequência de termos consecutivos de Fibonacci, $\{F_{i}+1/F_{i}\}$, converge para o número de ouro $\varphi=1/2$ $(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618$, ou ainda a raiz positiva da equação $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, como se verá mais adiante.

As razões $\{F_{i+1}/F_i\}$ de números consecutivos de Fibonacci formam uma sequência de números racionais que convergem para φ linearmente, ou seja, o número de dígitos de Fi+1/Fi é aproximadamente uma função linear de *i*. De fato, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\varepsilon < 1$ tal que $\alpha\varepsilon^i < |F_{i+1}/F_i - \varphi| < \beta\varepsilon^i$.

De tal feita que é possível obter sequências de números racionais que convirjam mais rapidamente para φ por meio do uso de métodos iterativos que solucionam a equação $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, como os métodos de Newton--Raphson, Halley e método da secante para citar alguns. Cada método gera uma sequência $\{\mathrm{xi}\}$ convergindo para a solução positiva de $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

A proporção áurea ou razão áurea é representada geometricamente pela divisão de uma reta em dois segmentos (a e b), sendo que quando a soma desses segmentos é dividida pela parte mais longa, o resultado obtido é chamado de "número de Ouro". Algebricamente, dados a, b, $a > b > 0$, então:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \qquad [1]$$

Usando a parte direita da Equação [1], temos que $a = b\varphi$, o que pode ser substituído na parte esquerda, resultando em:

$$\frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b\varphi}{b} \qquad [2]$$

Simplificando a Equação [2] temos:

$$\frac{b(\varphi+1)}{b\varphi} = \frac{b(\varphi)}{b(1)} \Leftrightarrow \frac{\varphi+1}{\varphi} = \varphi \qquad [3]$$

Multiplicando ambos os lados da Equação [3] por φ resulta em:

$$\varphi + 1 = \varphi^2 \qquad [4]$$

Finalmente, subtraindo φ^2 de ambos os membros da Equação [4] e posteriormente, multiplicando todas as parcelas por -1, encontramos:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \qquad [5]$$

A Equação [5] apresenta duas raízes reais, sendo a positiva $\Phi \approx 1{,}618$ conhecida como o Número de Ouro.

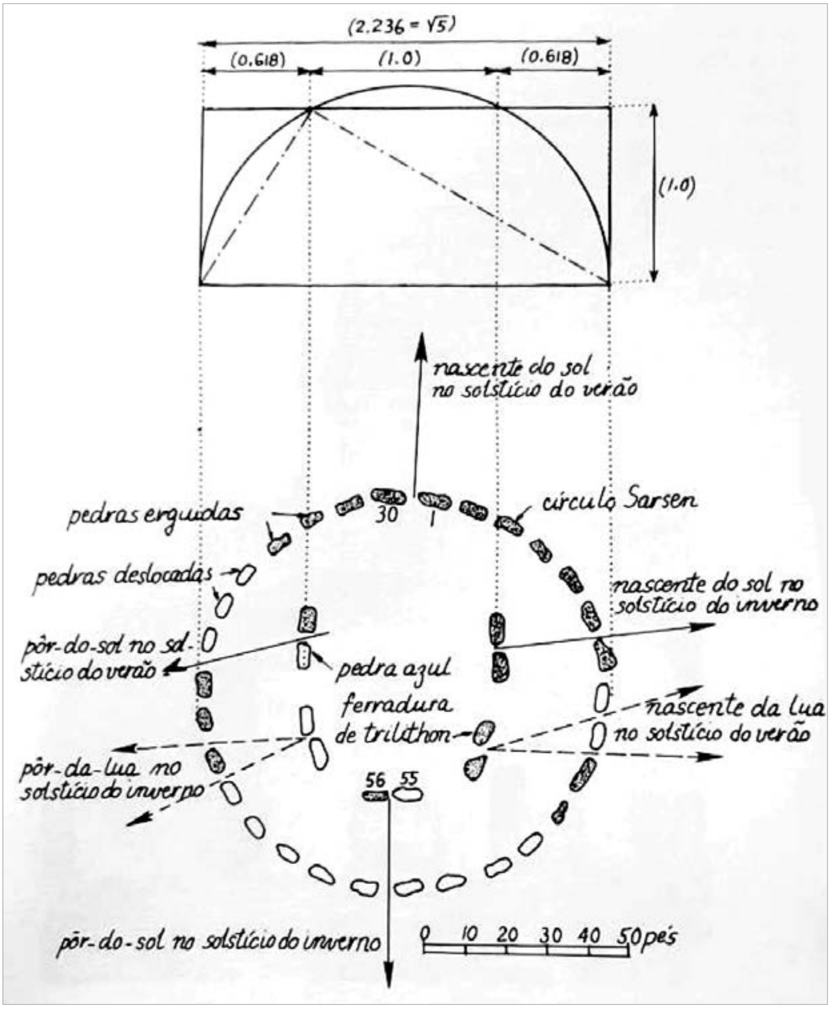
Curiosamente, a secção áurea é o único número cujo quadrado é maior que ele mesmo por um, expresso matematicamente como $\varphi^2 = \varphi + 1$. φ também é o único número cujo recíproco é menor que ele mesmo por um, expresso como $1/\varphi = \varphi - 1 \approx 0{,}618$.

1 A BELEZA ÁUREA NA ARQUITETURA

Ao se observar os padrões de crescimento da natureza, seja no micro como no macro cosmo, é possível a observação de padrões de crescimento e desenvolvimento, os quais podem ser convertidos em padrões geométricos e de diagramas. Dentre estes, e talvez o mais emblemático seja o denominado de segmento de Seção Áurea, expresso por uma razão retangular de $a : b = (a{+}b) : a \approx 1{,}61803$ e que ao longo do tempo lhe foram atribuídas diversas denominações as quais buscam ilustrar sua significância, tais como “Número de Ouro”, “Assinatura de Deus”, “Proporção Divina” entre outras. Esta proporção é observada não só na natureza, mas também nas expressões artísticas e técnicas do homem seja na arte, nas máquinas e de modo bastante expressivo na Arquitetura, independente da cultura, tempo e localização geográfica.

Segundo Doczi (1990), há indícios de que os povos pré-históricos ao observar os movimentos celestes, buscaram criar estruturas de pedra que possibilitassem a indicação precisa das estações do ano, orientação geográfica e, em paralelo, atribuindo valores sagrados. Estas construções ocorreram em todo o Norte da Europa e possivelmente uma das mais conhecidas seja o complexo de Stonehenge III, na Inglaterra, orientado de tal forma a demarcar precisamente os soltícios de Inverno e de Verão. Sua tipologia estrutural é composta de um arranjo de pedras internas em forma de ferradura envolto por um segundo arranjo que a circunda, chamado de “Círculo de Sarsen” (Figura 1) e que se observa com precisão a relação de Seção Áurea na distância entre estes elementos.

Figura 1: Seção Áurea no "Círculo de Sarsen".

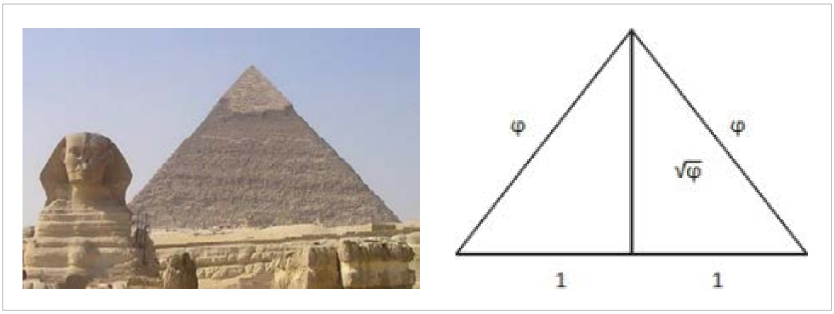


Fonte: Doczi, 1990.

A razão áurea tem sido apreciada na Arquitetura ao longo da toda a História. Acredita-se que a aplicação mais antiga na arquitetura seja a Grande Pirâmide Quéops (Khufu) em Gizé (*Great Pyramid of Giza*). Embora não haja escrita documentada para confirmar sua implementação pretendida, há uma proporção áurea dentro da forma triangular com margem de precisão de 0,025% (Figura 2). Outras obras arquitetônicas célebres que exploram com maior profundidade a razão Áurea são encontradas com frequência na Grécia antiga, como o Partenon e considerando todo o desenvolvimento da Filosofia e da Matemática, pode-se afirmar categoricamente que seguiram a proporção divina de forma intencional e meticulosa.

Essas proporções vão além da delimitação da proporção geral dos edifícios. Pode- se observar que a disposição uniforme das colunas é frequentemente considerada uma referência à proporção e ao seu papel nos antigos gregos.

Figura 2: Divina proporção na construção de pirâmides.



Fonte: Adaptado de Pixabay[1].

No período medieval caracterizado pelas edificações de grandes e esbeltas catedrais góticas, é facilmente identificado o uso de sistemas de proporção, onde uma das mais célebres seja a Catedral de Notre Dame de Paris (1.163 - 1345). Mas pode-se citar também o Taj Mahal (1.632 – 1.648) na Índia, e em tempos mais recentes prédio do Secretariado da ONU em Nova York (1947 a 1952), concebido em acordo à proporção áurea pelos arquitetos Oscar Niemeyer e Le Corbusier. Quatro anos antes de sua construção, Le Corbusier havia desenvolvido seu sistema Modulor em 1943, descrevendo-o como uma "gama de medidas harmoniosas para se adequar à escala humana, universalmente aplicável à arquitetura e às coisas mecânicas".

Portanto, supõe-se que, com esse sistema residindo em sua mente, o edifício pode ter sido uma demonstração proposital da implementação da proporção áurea na arquitetura. O prédio que está em Nova York Manhattan possui 154 metros de altura, e dividir 505 pés por um número irracional como a proporção áurea teve seus desafios. Para solucionar tal problema, o arquiteto Le Corbusier separou habilmente os 39 andares colocando faixas refletoras em sua fachada. Formando vários retângulos que seguem a proporção áurea. Assim, o prédio foi construído de forma que cada 10 andares formam um retângulo

1 Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/egito-esfinge-pir%C3%A2mide-cairo-giz%C3%A9-2133951/ . Acesso em: 3 maio 2023.

áureo, isto é, a razão do lado maior pelo menor é aproximadamente φ. Além disso, a razão da altura do edifício pela sua largura é aproximadamente áurea.

Uma das maneiras mais simples de dar equilíbrio e estrutura a um edifício é seguir os princípios do retângulo áureo. Usando a proporção para determinar o *layout*, a colocação de portas e janelas. Uma vez que comprimentos e larguras correspondem à proporção, quando a área interna do piso é dividida em um quadrado e um retângulo, as proporções devem sempre corresponder à proporção divina. Permanecendo sempre lindamente equilibrado e ideal para uma vida em plano aberto.

Assim como os recursos de design de interiores definem o clima dos cômodos de uma casa, a maneira como um edifício aparece do lado de fora também pode ter um grande impacto no ambiente em que está situado. De tal forma que facilmente se observa a grande utilidade e importância que a proporção áurea possui na arquitetura e no design, uma vez que o seu uso pode contribui para que um edifício, além de belas formas, tenha também a função de oferecer uma qualidade excepcional de aparência e funcionalidade também. Para uma aplicação de ordem prática, faz-se sistemas de diagramas os quais permitem não só a busca de proporção da composição da obra, mas também relações exemplificadas por alinhamentos e continuidade dos diversos elementos tais como aberturas, paredes colunatas entre outros. Esses diagramas conferem legibilidade, reforçam as forças atuantes na obra e no lugar de implantação e, em síntese, criam uma conexão entre o homem e a própria natureza externada na confecção da obra arquitetônica.

O número de ouro é geralmente a proporção realista mais amplamente aceita e aplicada em um projeto arquitetônico como um método para garantir um acabamento esteticamente agradável e equilibrado nas escalas. Embora a importância dessas proporções seja, obviamente, secundária à integridade estrutural, um aceno na direção geral desse princípio pode ter um efeito dramático na atratividade da propriedade. No entanto, vale a pena notar que essas medições são normalmente usadas de forma aproximada ou como regras de ouro, em vez de números rígidos e rápidos.

Dito isto, o número de ouro pode ser visto como um especial detalhe estético, que propicia equilíbrio entre senso artístico e proporção com um belo acabamento da obra.

A estimativa do número de Ouro tem sido aprimorada ao longo do tempo, e atualmente é possível aproximar esse valor por meio de métodos numéricos. O método de Newton-Raphson é um dos mais utilizados para essa finalidade e se baseia na iteração de fórmulas matemáticas que usam a tangente da curva da função em um ponto inicial para aproximar a raiz. Outro método também popular é o de Halley, que leva em conta a segunda derivada da função. Esses métodos permitem uma aproximação cada vez mais precisa do número de Ouro, contribuindo para a compreensão e aplicação desse importante conceito matemático. Neste contexto, objetivo deste trabalho é comparar os métodos de Newton-Raphson e Halley na determinação de aproximações para o número de Ouro, quantificando o número de casas decimais corretas obtidas a cada iteração.

2 O NÚMERO DE OURO E SUA RELAÇÃO COM OS MÉTODOS ITERATIVOS

Os métodos numéricos, de forma geral, são utilizados para determinar soluções aproximadas para problemas matemáticos. Quando um problema não possui solução exata é comum a aplicação de métodos iterativos para obter uma aproximação (BARROSO, 1987). No processo de iteração, é realizada uma sucessão de passos visando a convergência para o valor aproximado da solução exata do problema. A convergência está relacionada com o critério de parada do processo de iteração, sendo que é comum estabelecer um teste de convergência para decidir quando uma solução é suficientemente precisa.

O método de Newton-Raphson é um dos mais utilizados no contexto dos métodos numéricos e se baseia na iteração de fórmulas matemáticas que usam a tangente da curva da função em um ponto inicial para aproximar a raiz. O método utiliza um ponto, com o objetivo de minimizar o valor da função de iteração no ponto fixo para a convergência.

O método de Halley é um outro método numérico popular que leva em conta a segunda derivada da função. Este também é um método iterativo que utiliza ponto fixo, empregado para determinar uma solução aproximada para problemas que não possuem solução exata. Esse método foi desenvolvido com o intuito de aprimorar o método de Newton-Raphson no sentido de acelerar sua convergência.

Os métodos de Newton-Raphson e Halley podem ser utilizados para gerar aproximações para diversos problemas, como o da estimação do número de Ouro que tem sido aprimorado ao longo do tempo, e atualmente é possível aproximar esse valor por meio desses métodos.

De forma geral, os métodos iterativos são desenvolvidos em um ambiente computacional, no qual se encontrem implementados, ou em certa linguagem que permite que o algoritmo das funções sejam escritas. O *software R* (*R Core Team*, 2021) é um ambiente para estatística computacional e gráfica com diversas funções já implementadas na forma nativa do software ou por meio de suas extensões com o uso de pacotes de funcionalidades. Neste trabalho para a realização dos cálculos foi utilizado a função *mpfr* do pacote RMPFR (MAECHLER, 2023), e escrita as funções seguindo as especificações da linguagem para determinar os resultados. Na sequência apresentaremos maiores detalhes acerca de cada um dos dois métodos aqui destacados.

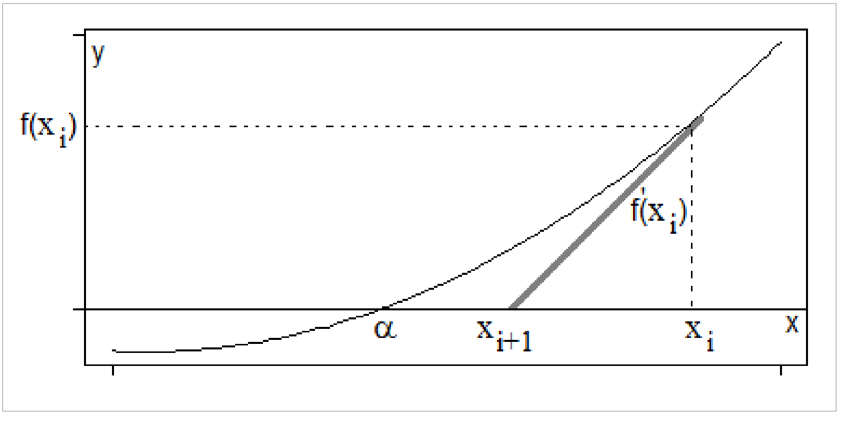
2.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

As razões $\{F_{i+1}/F_i\}$ de números consecutivos de Fibonacci é uma sequência de números racionais que convergem para φ linearmente, ou seja, o número de dígitos de F_{i+1}/F_i é aproximadamente uma função linear de i. De fato, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\varepsilon < 1$ tal que $\alpha\varepsilon^i < |F_{i+1}/F_i - \varphi| < \beta\varepsilon^i$.

De tal feita que é possível obter sequências de números racionais que convirjam mais rapidamente para φ por meio do uso de métodos iterativos que solucionam a equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, como os métodos de Newton-Raphson, Halley e método da secante para citar alguns. Cada método gera uma sequência $\{x_i\}$ convergindo para uma das soluções de $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Se a aproximação inicial da raiz da equação $f(x) = 0$ for x_i, pode-se estender uma reta tangente a partir do ponto $[x_i, f(x_i)]$. O ponto onde essa tangente intercepta o eixo das abscissas normalmente representa uma estimativa melhorada da raiz (Figura 1).

Figura 3: Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.



Fonte: Dos autores.

Considere a reta tangente ao ponto $[x_i, f(x_i)]$ apresentada na Equação [6]:

$$y - f(x_i) = m\,(x - x_i) \qquad [6]$$

em que, m indica o coeficiente angular, que pode ser representado pelo valor da derivada da função $f(x)$ em x_i, $f'(x_i)$. Substituindo este valor na Equação [6], facilmente se obtém a raiz desta reta tangente considerando $y = 0$ e $x = x_{i+1}$ para uma nova aproximação:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad [7]$$

2.2 MÉTODO DE HALLEY

Edmond Halley (1656-1742) é mais conhecido por ter calculado a órbita e previsto o retorno do cometa de curto período que leva seu nome (Aghalovyan, 2020). No entanto, como muitos cientistas de sua época, ele se dedicou a diversas atividades matemáticas e científicas. Entre suas contribuições matemáticas está o desenvolvimento de um método numérico para encontrar as raízes de funções de valor real, que ficou conhecido como Método de Halley. Embora semelhante ao Método de Newton, o Método de Halley converge mais rapidamente nas proximidades de uma raiz, e sua função de iteração é apresentada na Equação [8]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2f(x_i)f'(x_i)}{2[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \qquad [8]$$

O método de Halley tem convergência cúbica, ou seja, na convergência final cada iteração triplica o número de dígitos significativos (PRESS *et al.*, 2007).

3 ESTIMATIVA DO NÚMERO DE OURO POR MEIO DE COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON E DE HALLEY

A implementação foi realizada no software R (R Core Team, 2021). Para comparar os dois métodos, utilizou-se como aproximação inicial o número $x_0 = 2$ escrito em MPFR por meio do pacote RMPFR (MAECHLER, 2023) com precisão de 2^{20} bits, conforme *script* apresentado a seguir.

```
.N<- function(.) mpfr(.,precBits=2^20)
xk<- .N(2)
```

Considerando a Equação [5] e as funções de iteração apresentadas nas Equações [7] e [8], determinou-se as seguintes funções de iteração:

 # Método de Newton

```
xk1<- xk -((xk^2 - xk-1)/((2*xk) - 1))
xk< - xk1
```

 # Método de Halley

```
xk1<-xk-(((2*((xk^2)-(xk)-1))*((2*xk)-1))/
        ((2*((2*(xk)-1)^2))-((xk)^2-(xk)-1)*2))
xk<-xk1
```

Foram realizadas 10 iterações para cada método e, a cada iteração, a quantidade de casas decimais corretas foram armazenadas.

A Tabela 1 apresenta a quantidade de casas decimais corretas obtidas a casa iteração realizada. Considerando a aproximação inicial $x_0 = 2$, ambos os métodos apresentaram apenas uma casa decimal correta na primeira iteração. Entretanto, com o passar das iterações, o Método de Halley demonstrou um desempenho superior em relação ao Método de Newton-Raphson. Após 5 iterações, o Método de Halley obteve 202 casas decimais corretas, enquanto o Método de Newton alcançou apenas 26. E, após 10 iterações, o Método de Halley obteve 49361 casas decimais corretas, enquanto o Método de Newton alcançou 855.

Essa diferença no desempenho se deve à forma como cada método utiliza as informações das derivadas da função. Enquanto o Método de Newton utiliza apenas a primeira derivada da função, o Método de Halley utiliza também a segunda derivada, o que confere maior precisão aos resultados. Além disso, o Método de Halley apresenta convergência cúbica, o que significa que a precisão do resultado triplica a cada iteração, enquanto o Método de Newton apresenta convergência quadrática, o que resulta em menor velocidade de convergência.

Tabela 1: Quantidade de casas decimais corretas do número obtidas a cada iteração

Iterações	Newton-Raphson	Halley
1	1	1
2	2	5
3	5	21
4	12	66
5	26	202
6	53	608
7	105	1827
8	213	5484
9	426	16452
10	855	49361

Fonte: Dos autores.

A taxa de convergência de um método numérico é um importante critério de avaliação, pois representa a velocidade com que o método se aproxima da solução. Nesse sentido, o Método de Halley apresenta uma vantagem em relação ao Método de Newton- Raphson, pois sua taxa de convergência é maior. Isso significa que o Método de Halley é capaz de produzir aproximações mais precisas em menos iterações, o que pode ser extremamente útil em aplicações onde o tempo de processamento é crítico, ou quando a função é complexa e requer muitas iterações para se aproximar da solução.

Além disso, uma taxa de convergência maior também pode reduzir a possibilidade de erro numérico e tornar o método mais robusto. Em resumo, a utilização do Método de Halley pode trazer benefícios significativos em termos de eficiência e precisão na resolução de problemas numéricos.

REFERÊNCIAS

AGHALOVYAN, L. Consequences of a Generalized Newtonian Gravity with an Exponential Factor. **International Journal of Astronomy and Astrophysics,** v. 10, n. 3, p. 224-234.

DOCZI, György. **O PODER dos Limites**. Editora Mercúrio: São Paulo, 1990.

MAECHLER, M. **Rmpfr: R MPFR** - Multiple Precision Floating-Point Reliable.R package version 0.7-0, 2023.

PRESS, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P. (2007) **Numerical Recipes**: The art of scientific computing. Third Edition.

R CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2021. Disponível em: https://www.R-project.org/.

SETZER, Valdemar W. **A matemática *pode ser* interessante... e linda!** Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza. São Paulo: Blucher, 2020. 334 p.

CAPÍTULO 10

A RELAÇÃO IBOVESPA x PETRÓLEO x PETROBRAS ATRAVÉS DE CORRELAÇÃO E REGRESSÃO LINEAR

Eduarda Debortoli da Silva: eduardadebortoli22@gmail.com
Daniela Trentin Nava: dnava@utfpr.edu.br

O petróleo pode ser considerado como uma das matérias-primas mais relevantes na economia mundial, pois suas aplicações variam desde fonte de energia até materiais como plástico, tinta, dentre outros. Quando se fala em petróleo no Brasil rapidamente se remete ao nome "Petrobras", sendo a empresa responsável principalmente pela exploração e produção de petróleo e seus derivados no Brasil. O barril de petróleo e a Petrobras possuem influência significativa na bolsa de valores, pois esta atua como alma da economia, e tanto a *commodity* quanto a empresa estatal em questão são referências na economia brasileira atualmente.

No Brasil, a lei federal de 1953 instituiu o monopólio estatal na exploração e produção de petróleo, seguida pela criação da Petrobras em 1953. Momento em que o país dá início ao movimento de inserção internacional de exploração, produção e distribuição de petróleo.

O dólar americano (USD) é a principal moeda de faturamento do petróleo internacional para negociação, assim as flutuações na taxa de câmbio do USD são consideradas como fator importante nas mudanças do preços do petróleo. E, logicamente, uma cotação de dólar desvalorizado diminui o valor real do barril em outras moedas. Isto posto, percebe-se que a cotação do dólar exerce uma influência significativa também no mercado de ações, uma vez que as transações deste possuem como moeda base o dólar americano. E, o que se observa normalmente, é que quando o valor do dólar cresce, os índices da bolsa caem, ou seja, uma relação inversa.

No Brasil, o índice de mercado mais difundido para tais transações financeiras é Bovespa (Ibovespa). Pretendeu-se neste trabalho investigar se o índice Ibovespa é influenciado pelo preço dos barris de petróleo, assim como pelas ações da Petrobras, além de averiguar se o petróleo possui influência nas ações da Petrobras. Para tal foram realizadas análises de conjuntos de dados utilizando softwares computacionais e métodos estatísticos.

1 UM POUCO DE HISTÓRIA DA B3 E TEMAS AFINS

Uma Bolsa de valores, segundo Gomes (1997) é um mercado onde são efetuadas transações de compra e venda de produtos ou valores mobiliários. Neste mercado são negociadas ações de empresas públicas ou privadas, e estas representam a menor fração do capital de uma empresa.

Os movimentos de uma bolsa de valores são compreendidos por meio de índices de mercado, e estes segundo Fontes (2006) servem como referência para análise do comportamento dos preços de determinada ação. Segundo Hameed e Ashraf (2006) as flutuações nos preços dos ativos devido aos incidentes ou eventos negativos, que ocorrem interna ou externamente, impactam negativamente o desempenho dos ativos e reduzem a confiança do investidor. Os autores ainda relatam que isso ocorre devido ao aumento do risco financeiro, que é um insumo importante para tomada de decisão em relação à volatilidade do mercado.

De acordo com Tavares e Penedo (2018), no Brasil a "Brasil, Bolsa, Balcão" (B3), realiza a classificação das empresas que solicitam a inclusão aos níveis de governança corporativa. Atualmente existem mais de 22 mil participantes dos mercados de atuação listadas na B3 divididos em 16 categorias.

O índice Ibovespa é o principal índice da bolsa de valores, acumulando 80% do volume financeiro operado na B3. Este índice utiliza como estrutura a média ponderada dos ativos cuja carteira é composta pelas ações que tiveram o maior índice de negociação nos últimos 4 meses. O índice é representado através de pontos, onde cada ponto equivale a um real.

Segundo Sucolotti (2007), cada ação integrante da carteira recebe um peso que varia de acordo com a sua liquidez, e frequentemente a composição e os pesos são alterados para melhor representar o mercado de ações. Companhias como a Petrobras, por exemplo, que possuem um peso considerável no índice estudado, podem ser responsáveis, dependendo do desempenho de sua cotação durante o pregão, em fazer a pontuação do Ibovespa subir ou cair.

1.1 O PETRÓLEO E A PETROBRAS

A palavra petróleo origina-se do latim *petra* (pedra) e *oleum* (óleo), sendo "o óleo que vem da pedra". Com o crescimento da indústria automobilística, posterior à 2ª Guerra Mundial, o petróleo ultrapassou o carvão como principal fonte de energia, e desde então este recurso vem tomando conta do mundo moderno de diversas formas pois seus produtos são indispensáveis em diversas áreas e em especial o transporte.

Relacionando a *commodity* em questão e o mercado acionário, pode-se desconfiar que o preço do petróleo pode afetar os preços das ações. Veras (2020)relata que no caso de empresas demandantes de petróleo, um aumento inesperado nos preços dessa matéria- prima geralmente reduzirá os fluxos de caixa e os preços das ações, enquanto para as empresas envolvidas na produção de petróleo, ocorrerá o contrário, influenciando positivamente nos retornos das ações.

Com base no crescimento da produção de petróleo no Brasil, em 1953 foi criada a Petrobras, com o intuito de servir de base à indústria do petróleo nacional. Atualmente a empresa compõe a carteira teórica do Ibovespa de maneira significativa, possuindo duas ações na bolsa com códigos PETR3 e PETR4, e quando somadas representam uma taxa considerável do total da carteira.

2 E COMO SE PODE AVERIGUAR ESTATISTICAMENTE AS SUSPEITAS DESCRITAS?

A fim de determinar a força do relacionamento entre duas observações emparelhadas, uma análise de correlação torna-se necessária. A correlação aponta até que ponto os valores de uma variável estão relacionados com os de outra (STEVENSON, 1981).

Para verificar as nossas suspeitas, empregou-se três coeficientes de correlação, a saber Pearson, Spearman e Kendall. Sendo que a correlação de Pearson analisa se há relação linear entre as variáveis, e é um coeficiente paramétrico. Já as duas outras correlações estatísticas não paramétricas, ou seja, conseguem medir qualquer tipo de relação entre variáveis.

Os coeficientes de correlação variam dentro do intervalo [-1, 1], o grau de relação das variáveis se dá pelo valor obtido, existem diferentes classificações na literatura, uma destas é tal que se $r = 0{,}10$ até $0{,}30$ (fraco); $r = 0{,}40$ até $0{,}6$ (moderado); $r = 0{,}70$ até 1 (forte) (DANCEY, 2006).

Segundo Sartin *et al.* (2015), quando existe correlação entre duas variáveis pode- se elaborar uma equação que estime a influência entre estas através da regressão linear. A fim de se analisar a relação de apenas uma variável explicativa com a variável resposta então aplica-se a Regressão Linear Simples (RLS).

Para estimar os parâmetros A e B visando minimizar a soma dos quadrados dos desvios, realiza-se o processo de método dos mínimos quadrados, onde a equação do modelo se encontra na Equação (1):

$$y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (1)$$

Este método consiste na obtenção dos estimadores dos coeficientes de regressão a e b.

$$a = y - bx$$

Sendo x e y médias de X e Y, temos:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

A validação do modelo obtido pode ser feita pelo coeficiente de determinação, que tem a propriedade de medir o quanto da variabilidade dos dados foi incorporada pelo modelo de regressão, este coeficiente tem valores no intervalo $R^2 \in [0{,}1]$, de modo que quanto mais próximo de 1, maior parte da variação da variável resposta está sendo explicada. Segundo Montgomery, Runger e Calado (2021), o coeficiente é usado para julgar a adequação de um modelo de regressão, como quantidade de variabilidade nos dados explicada ou considerada pelo modelo.

Além dos modelos de regressão linear, existem os modelos denominados como linearizáveis, segundo Morais et al. (2020) estes são aqueles que por meio de alguma transformação, tornam-se lineares. Nesse sentido, alguns destes são as formas funcionais: Log-Log, Log-Lin e Lin-Log, baseadas em modelos de logaritmo. Estas podem ser aplicadas nas regressões lineares, a fim de obter um melhor resultado na pesquisa.

Luquini, Cruz e Castro (2017) ainda relata que no modelo Log-Log, o coeficiente angular do modelo mede a elasticidade, ou seja, a variação percentual da variável dependente em relação à variação percentual da independente. Já o modelo LogLin, visa medir a taxa de crescimento e o modelo Lin-Log (ao contrário do anterior) fornece a variação absoluta na variável dependente dada uma variação percentual na variável independente.

2.1 DADOS INVESTIGADOS

Os dados das séries de preços das ações foram coletados do site oficial *Yahoo Finance*. Este, segundo Bordino (2014), tem sido a principal fonte de notícias financeiras e site de pesquisa nos Estados Unidos da América (EUA) desde janeiro de 2008. O código do índice Ibovespa é "BVSP", do barril do petróleo "CL=F" e da Petrobrás "PBR".

O período escolhido para realizar as análises correspondem à 504 dias, entre os dias de 31/12/2019 à 30/01/2022, organizadas em data frame para fins de cálculos computacionais. Foram calculadas as correlações entre as variáveis: Ibovespa x Barril de petróleo, Barril de petróleo x Petrobras e Ibovespa x Petrobras. Posteriormente, foram calculadas as regressões lineares entre as mesmas variáveis, seguido da criação de gráficos de dispersão de cada correlação com respectivas equações de regressão.

A fim de realizar uma comparação entre regressões, para observar qual seria o melhor modelo para cada correlação das variáveis, foram aplicados os modelos linearizáveis, ou seja, as formas funcionais.

3 RESULTADOS ESTATÍSTICOS OBSERVADOS

Uma amostra dos dados iniciais e finais coletados e posteriormente analisados, estão dispostos na Tabela 1 a seguir. Nesta, cada coluna representa uma característica dos pontos da ação naquele dia em específico, sendo: BVSP. OPEN = Preço de Abertura; BVSP. HIGH = Preços Máximos; BVSP.LOW = Preços Mínimos; BVSP.CLOSE = Preço de Fechamento; BVSP.VOLUME = Volume de transação; BVSP. ADJUSTED = Preço ajustado.

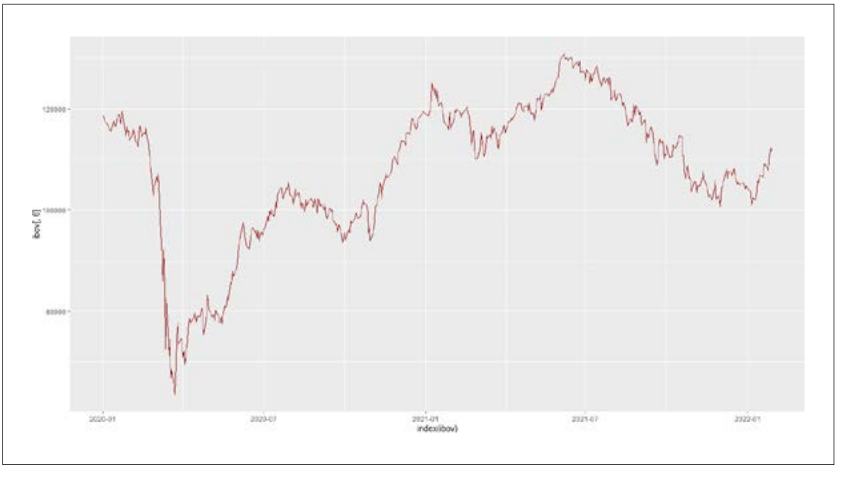
Tabela 1: Informações iniciais e finais dos dados do Ibovespa

Datas	BVSP OPEN	BVSP HIGH	BVSP LOW	BVSP CLOSE	BVSP VOLUME	BVSP ADJUST ED
02/01/2020	115662	118573	115649	118573	5162700	118573
03/01/2020	118564	118792	117341	117707	6834500	117707
06/01/2020	117707	117707	116269	116878	6570000	116878
26/01/2022	110207	112695	110204	111573	15513800	111573
27/01/2022	111303	113057	111303	112315	14812000	112315
28/01/2022	112611	112969	111407	111478	13520100	111478

Fonte: Autoras (2022)

Observa-se que os preços do índice Ibovespa tiveram um declínio entre os anos de 2020 e 2022, porém o volume de transações aumentou consideravelmente.Toda a série de dados pode ser visualizada na Figura 1. O gráfico foi obtido através do *software* RStudio, utilizando a coluna "Valor Ajustado", pois esta incorpora eventos como desdobramentos e distribuição de dividendos, que podem afetar a série.

Figura 1: Gráfico da série de dados Ibovespa para o período 31/12/2019 – 30/01/2022



Fonte: Autoras (2022)

Analisando o gráfico, pode-se observar que no mês de Março de 2020 os pontos do Ibovespa começaram a cair, isso ocorreu porque nesse mês, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou a pandemia de COVID-19, doença ocasionada pelo novo coronavírus (SarsCov - 2).

Tendo o distanciamento social como sua medida preventiva mais eficiente enquanto não se desenvolviam as vacinas para o novo vírus, a pandemia provocou fortes fissuras nos circuitos de produção e consumo, com uma escalada de desemprego e falências. Ao dizer isto, confirma-se a teoria de que influências externas, como pandemias, podem alterar a bolsa de valores.

No mês de Abril de 2020 a bolsa despencou atingindo um nível extremamente baixo. O valor ajustado do índice em questão normalmente está acima de R$ 100.000, porém neste mês chegou a ser R$ 63.538 de acordo com *Yahoo Finance* (2022). Pode-se dizer que um dos motivos desta queda foi o combate ao coronavírus, uma vez que segundo Figueiredo (2020) foi o momento em que o mundo atingiu a marca de um milhão de infectados.

Em Julho de 2020 o índice Ibovespa volta a crescer gradativamente, tendo uma alta de 8,26% em relação ao final de Junho. Ainda assim, a bolsa estava 11% abaixo dos patamares pré-pandemia.

Uma análise descritiva dos dados foi realizada e os resultados podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2: Estatísticas descritivas série de dados Ibovespa para o período 31/12/2019 – 30/01/2022

Estatísticas	BVSP OPEN	BVSP HIGH	BVSP LOW	BVSP CLOSE	BVSP ADJUSTED
Mínimo	63604	67604	61691	63570	63570
Média	107719	108900	106521	107714	107714
Mediana	110229	111522	108859	110227	110227
Máximo	130776	131190	129526	130776	130776
Variância	197171582	187095142	20529838	197087574	197087574
Desvio Padrão	14041,78	13678,27	14328,24	14038,79	14038,79
CV(%)	13,03	12,56	13,45	13,03	13,03
Assimetria	-0,81	-0,76	-0,85	-0,81	-0,81
Curtose	0,252	0,105	0,395	0,253	0,253

Fonte: Autoras (2022)

Observa-se que embora a amplitude dos dados do índice IBOVESPA seja alta, o coeficiente de variação varia entre aproximadamente 12% e 14%, apresentando uma moderada dispersão, portanto. Os coeficientes de Assimetria de todas as colunas do índice Ibovespa são bem próximas entre si, e todas possuem um valor menor do que zero, assim, suas distribuições são assimétricas negativas. Isto significa que a "cauda" da curva de frequência se encontra mais alongada à esquerda, o que justifica os valores das médias serem inferiores ao valores das medianas.

Os coeficientes de Curtose (K) dos dados não são tão próximas umas das outras, porém a maioria delas possuem um K menor do que 0,263, podendo ser classificada com uma leptocúrticos, exceção apenas para preços mínimos.

Assim como o índice Ibovespa, foi realizada uma análise dos dados do barril do petróleo e da Petrobrás baseada nas informações presentes no *Yahoo Finance* no período de 31/12/2019 a 30/01/2022 utilizando o *software* RStudio. A Tabela 3 representa os valores iniciais e finais para as cotações do barril de petróleo bruto

Tabela 3: Informações iniciais e finais dos dados do Barril de petróleo, em USD

Datas	CL=F OPEN	CL=F HIGH	CL=F LOW	CL=F CLOSE	CL=F VOLUME	CL=F ADJUST ED
02/01/2020	61,60	61,60	60,64	61,18	486873	61,18
03/01/2020	61,18	64,09	61,13	63,05	885861	63,05
06/01/2020	63,71	64,72	62,64	63,27	724236	63,27
26/01/2022	85,26	87,95	85,01	87,35	459642	87,35
27/01/2022	87,15	88,54	86,20	86,61	427804	86,61
28/01/2022	87,50	88,84	86,44	86,82	436172	86,82

Fonte: Autoras (2022)

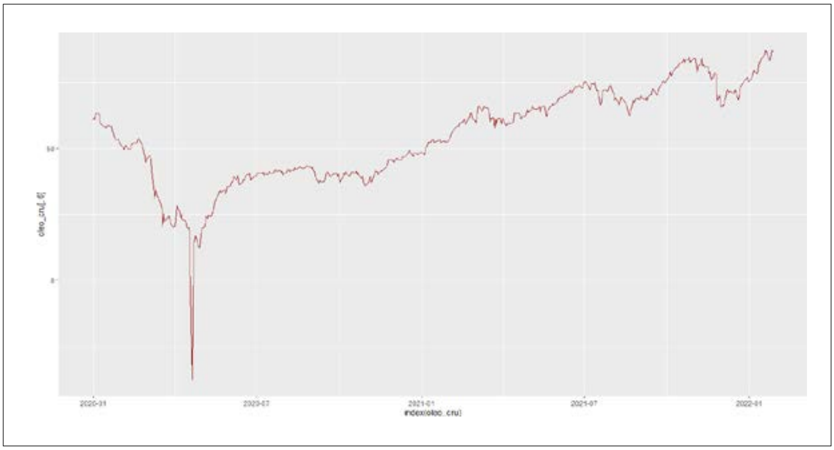
Cabe-se comentar que o preço do barril do petróleo subiu consideravelmente no período de dois anos, chegando a um preço máximo de US$88,84. Segundo Gil (2011) a dependência da economia mundial em relação ao petróleo é refletida e comprovada através da reação ao aumento do preço do mesmo, devido aos eventos geopolíticos e a resposta dos mercados perante estes acontecimentos de ameaça. Isto se reflete nos resultados obtidos com a pesquisa.

A série dos dados pode ser verificada na Figura 2 a seguir. Analisando o gráfico pode-se observar que nos primeiros seis meses de 2020 os preços do petróleo bruto despencaram, assim como os pontos do índice Ibovespa, relatado anteriormente.

Devido a transmissão rápida do novo coronavírus, os países tiveram que tomar medidas preventivas para a contenção deste, e isso afetou diretamente a economia mundial. Dessa forma, esse cenário fez com que a demanda por certos produtos diminuísse em inúmeros setores, sendo um deles o setor petrolífero.

Ferreira (2020) relata que em Abril a principal das *commodities* chegou a ser vendida por preços negativos. Na prática, produtores topavam pagar para que levassem embora os barris de petróleo, por não terem mais lugar disponível em seus armazéns, abarrotados.

Figura 2: Gráfico da série de dados do petróleo bruto para o período 31/12/2019 – 30/01/2022



Fonte: Autoras (2022)

No segundo semestre de 2020 o preço do petróleo voltou a se recuperar e retomar o patamar pré-pandemia, isto ocorreu segundo Borges *et. al*. (2020), devido ao afrouxamento do isolamento social e a normalização das atividades comerciais. Assim como o índice Ibovespa, foi realizada uma análise descritiva dos dados do barril de petróleo, conforme disposto na Tabela 4.

Tabela 4: Estatísticas descritivas série de dados barril de petróleo para o período 31/12/2019 – 30/01/2022

Estatísticas	CL=F OPEN	CL=F HIGH	CL=F LOW	CL=F CLOSE	CL=F ADJUSTED
Mínimo	-14,00	13,69	-40,32	-37,63	-37,63
Média	54,80	55,91	53,61	54,80	54,80
Mediana	56,76	57,72	56,23	56,80	56,80
Máximo	87,50	88,84	86,44	87,35	87,35
Variância	314,40	307,56	329,90	323,99	323,99
Desvio Padrão	17,73	17,54	18,16	17,99	17,99
CV(%)	13,03	12,56	13,45	13,03	13,03
Assimetria	-0,28	-0,16	-0,53	-0,42	-0,42
Curtose	-0,561	0,904	0,636	0,273	0,273

Fonte: Autoras (2022)

De posse dos resultados pode-se dizer que os os dados do barril de petróleo variam de forma moderada entre si, devido aos coeficientes de variação apresentarem moderada dispersão. Uma vez que os coeficientes de Assimetria dos dados são negativos, diz-se que a distribuição dos dados em cada coluna é assimétrica negativa. O coeficiente de Curtose, diferente do coeficiente de Assimetria, varia em suas classificações em cada coluna. Nas colunas "Preço de Abertura" e "Preço Máximo" os resultados das Curtoses são negativos, ou seja, menores do que 0,263 e assim suas distribuições são ditas leptocúrticas. Já as outras colunas restantes os valores obtidos são maiores do que 0,263, dessa maneira suas distribuições são ditas platicúrticas.

A terceira variável estudada nesta pesquisa é a Petrobras, como anteriormente, a Tabela 5 dispõe de alguns dados iniciais e finais do período estudado.

Tabela 5: Informações iniciais e finais dos dados da Petrobras, em USD

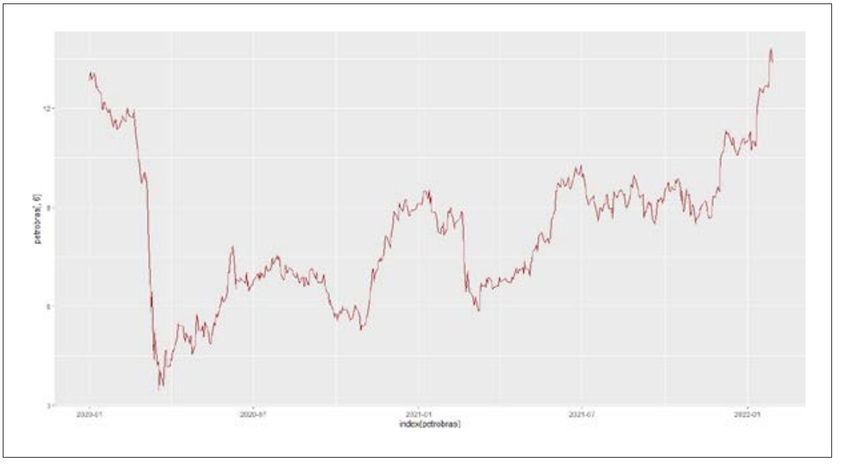
Datas	PBR OPEN	PBR HIGH	PBR LOW	PBR CLOSE	PBR VOLUME	PBR ADJUSTE D
02/01/2020	16,04	16,28	15,98	16,27	13764800	13,08
03/01/2020	16,17	16,29	15,97	15,99	17661700	12,86
06/01/2020	15,84	16,30	15,84	16,22	16614500	13,04
26/01/2022	13,43	13,85	13,38	13,61	62929300	13,61
27/01/2022	13,95	13,99	13,50	13,78	46722900	13,78
28/01/2022	13,78	14,06	13,18	13,38	52073800	13,38

Fonte: Autoras (2022)

Assim como o petróleo bruto, os dados da Petrobras são representados através da moeda americana (USD). Analisando a Tabela 5, pode-se observar que o "Volume de transações" em todos os seis dias são valores altos e significativos, ou seja, a quantidade de ações da Petrobras que são compradas e vendidas é significativa.

Para visualizar a oscilação dos dados da variável Petrobras ao longo do período estudado veja a Figura 3.

Figura 3: Gráfico da série de dados da Petrobras para o período 31/12/2019 – 30/01/2022



Fonte: Autoras (2022)

Observando os três gráficos apresentados até o momento, pode-se reparar que o gráfico da Petrobras é o mais instável no período escolhido, ou seja apresenta mais topos e fundos que os demais. Neste período ocorrem muitas oscilações, porém assim como as outras variáveis, em Abril o preço da ação caiu consideravelmente.

Para justificar essa alta variabilidade, buscou-se nos eventos e notícias ocorridos mundialmente e, no primeiro trimestre de 2020, ocorreram dois eventos com efeitos significativos no mercado de petróleo segundo uma pesquisa realizada na Central de Resultados no site oficial da Petrobras (2020): (i) a pandemia COVID-19, com redução na circulação de pessoas, provocando um choque duplo de oferta e de demanda; e (ii) fracasso nas negociações entre membros da OPEP e demais produtores, liderados pela Rússia, para uma definição das cotas de produção, o que contribuiu para o aumento da oferta global de petróleo e a redução no preço no início de março. Em 9 de Março – após a Rússia se recusar em aderir compromissos adicionais de corte de produção com a OPEP e a Arábia Saudita retaliar com guerra de preços – o barril experimentou a pior queda em um único dia desde a Guerra do Golfo.

Braun (2022) ressalta que o Brasil produz mais petróleo do que consome e se declara autossuficiente. Porém, devido ao tipo de petróleo extraído e a insuficiência na capacidade de refino, ainda precisa importar tanto o petróleo cru quanto seus derivados como a gasolina. Isso faz com que a Petrobras sinta imediatamente o efeito de qualquer mudança no valor que paga pelo petróleo no exterior.

A análise descritiva dos dados desta série podem ser verificados na Tabela 6 a seguir.

Tabela 6: Estatísticas descritivas série de dados Barril de petróleo para o período 31/12/2019 – 30/01/2022

Estatísticas	PBR OPEN	PBR HIGH	PBR LOW	PBR CLOSE	PBR ADJUSTED
Mínimo	4,40	4,82	4,01	4,31	3,20
Média	9,74	9,91	9,56	9,74	7,59
Mediana	9,85	10,11	9,74	9,90	7,75
Máximo	16,17	16,30	15,98	16,27	12,73
Variância	5,11	5,08	5,11	5,11	3,74
Desvio Padrão	2,26	2,25	2,26	2,26	1,93
CV(%)	23,19	22,75	23,65	23,21	25,48
Assimetria	0,43	0,44	0,40	0,42	0,26
Curtose	0,28	0,21	0,31	0,24	-0,49

Fonte: Autoras (2022)

Diferentemente das outras duas variáveis, a série dos dados da Petrobras apresenta alta dispersão, pois seus coeficientes de variação estão 20% e 30%. Isso significa que os dados das ações da Petrobras são mais heterogêneos. Os coeficientes de Assimetria dos dados de cada coluna, são positivos e maiores do que zero, podendo ser consideradas então como assimétricas positivas. No tocante aos coeficientes de Curtose dos dados, as colunas de Preço de Abertura, Preço Mínimo podem ser classificadas como tendo distribuiçãoleptocúrtica, e as demais colunas como tendo distribuição platicúrtica.

3.2 RESULTADOS OBTIDOS: CORRELAÇÃO E REGRESSÕES

Inicialmente foram calculadas as correlações entre o índice Ibovespa e o barril de petróleo, onde os resultados se encontram na Tabela 7.

Tabela 7: Correlações – Ibovespa x barril de petróleo

Correlação	Valor obtido	P-valor
Pearson	0,7125	< 0,05
Sperman	0,6493	< 0,05
Kendall	0,4966	< 0,05

Fonte: Autoras (2022)

Pode-se analisar que o coeficiente de Pearson obtido está relativamente próximo de 1 (0,7125), dessa forma diz-se que a correlação entre o índice Ibovespa e as ações do barril de petróleo pode ser considerada forte. O coeficiente de correlação de Spearman, possui como resultado 0,6493, um valor menor do que o coeficiente de Pearson, logo a correlação neste caso pode ser considerada moderada. O coeficiente de correlação de Kendall, tem resultado de 0,4966, o menor dentre os três tipos de correlação investigados. Neste caso, a correlação entre as variáveis pode ser considerada como sendo moderada.

De posse dos resultados dos coeficientes de correlação, faz sentido construir um modelo de regressão linear entre Ibovespa, definida como variável dependente, e o barril de petróleo, definida como a variável independente. O modelo e suas estatísticas estão dispostas na Tabela 8.

Tabela 8: Regressão linear entre Ibovespa x Barril de Petróleo

a	b	P-valor	R^2
77005,6	559,1	< 0,05	0,5066

Nota: a intercepto; b coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

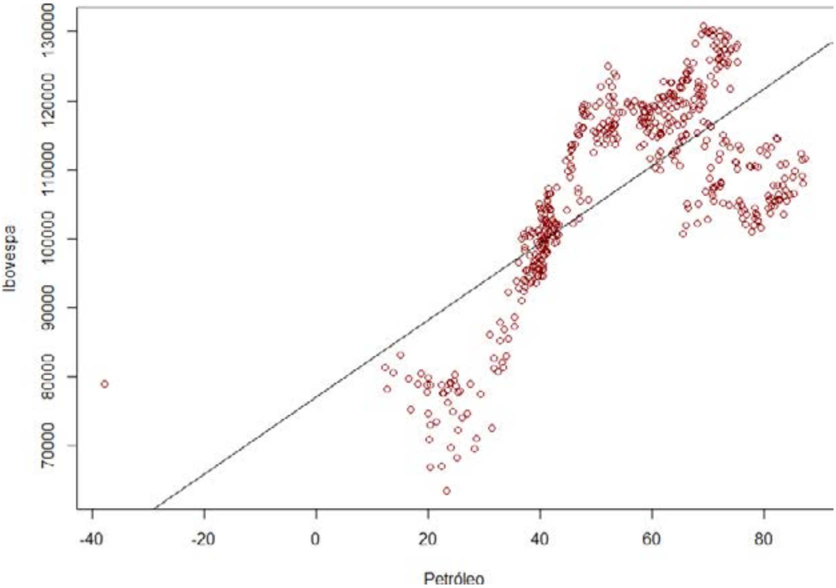
Fonte: Autoras (2022)

Analisando o coeficiente de determinação pode-se visualizar que este possui como resultado 0, 5066, isto significa que o modelo explica 50,66% da variabilidade total dos dados. Resumidamente, o modelo de regressão com os dados ajustados se encontra na Equação (2).

$$y = 77005{,}6 + 559{,}1x \qquad (2)$$

O modelo ajustado bem como o gráfico de dispersão estão dispostos na Figura 4.

Figura 4: Modelo de RLS ajustado para as variáveis Ibovespa x barril de petróleo



Fonte: Autoras (2022)

Um dos pressupostos do modelo de regressão linear, é a normalidade dos resíduos. Dessa maneira, para verificar tal propriedade, testes de hipóteses estatísticos foram utilizados, o escolhido foi teste Shapiro-Wilk. Este teste aponta que os dados não possuem distribuição normal de probabilidades.

Assim sendo, submeteu-se os dados à funções funcionais baseadas em logaritmo a fim de obter satisfazer os pressupostos do modelo de regressão linear, os resultados, podem ser averiguados na Tabela 9.

No modelo Log-Log o coeficiente B representa a elasticidade, então neste caso, com um aumento de 1% nos preços do barril de petróleo, as ações do índice Ibovespa sobem 0,3034%. Com o coeficiente angular do modelo Log-Lin, obtêm-se a taxa de crescimento, sendo a multiplicação de B por 100, obtendo então uma taxa de 0,5% de crescimento no índice Ibovespa. Já no modelo Lin-Log, divide-se o coeficiente angular por 100, para que assim seja obtido o valor do crescimento baseado na unidade do índice Ibovespa, que neste caso foi de R$ 296,89. Analisando os coeficientes de determinação, pode-se afirmar que de todas as regressões realizadas entre o índice Ibovespa e o barrilde petróleo, o modelo Log-Log foi o que melhor explica os dados, pois possui um R^2 de 63,93%.

Tabela 9: Resultados para asformas funcionais Ibovespa x barril de petróleo

Forma funcional	a	b	P-valor	R²
Log-Log	10,3806	0,3034	< 0,05	0,6393
Log-Lin	11,2662	0,0057	< 0,05	0,5177
Lin-Log	-9455	29689	< 0,05	0,6167

Nota: a intercepto; b coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

Fonte: Autoras (2022)

A Tabela 10 representa os resultados das correlações existentes entre o barril de petróleo e a Petrobras.

Tabela 10: Correlações – barril de petróleo x Petrobras

Correlação	Valor obtido	P-valor
Pearson	0,6985	< 0,05
Sperman	0,7308	< 0,05
Kendall	0,5510	< 0,05

Fonte: Autoras (2022)

O coeficiente de correlação de Pearson possui como resultado 0,6985, sendo considerada como uma correlação moderada. O coeficiente de correlação de Spearman é de 0,7308 podendo ser classificada como tendo correlação forte. Já a correlação de Kendall, 0,5510 é dita serde correlação fraca.

Os resultados obtidos para o modelo de correlação linear para estas duas variáveis estão dispostos na Tabela 11.

O coeficiente de determinação R^2, neste caso foi de 0,4869. Deste modo, o modelo explica apenas 48,69% da variabilidade total dos dados. Utilizando o valor do intercepto obtido já ajustado e o valor do coeficiente angular, obtêm-se o modelo de regressão presente em (3).

Tabela 11: Regressão linear entre Barril de Petróleo x Petrobras

a	b	P-valor	R²
3,1555	0,0687	< 0,05	0,4869

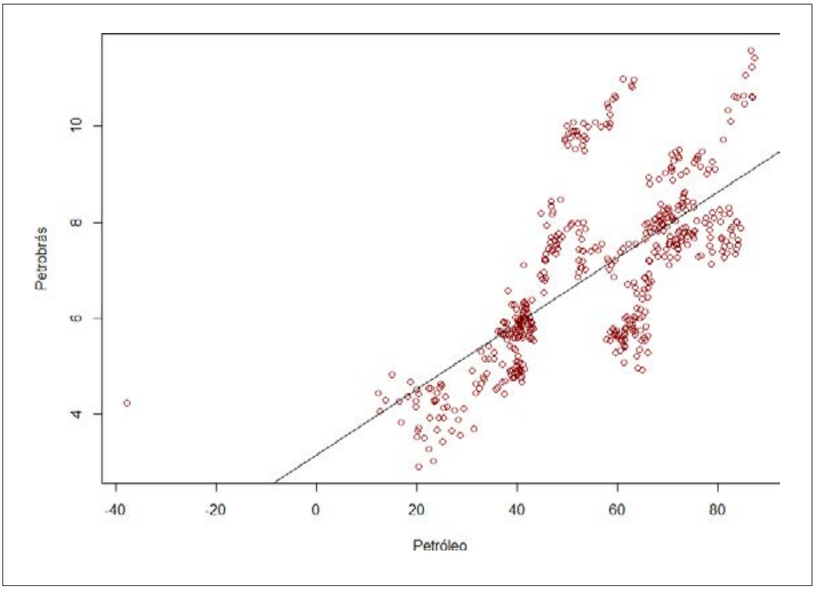
Nota: a intercepto; b coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

Fonte: Autoras (2022)

$$y = 3{,}1555 + 0{,}0687x \qquad (3)$$

Após a realização do teste de normalidade com a finalidade de averiguar a normalidade dos resíduos, estes novamente não seguem distribuição normal, a Figura 5 evidencia este fato. Nela está disposto o diagrama de dispersão dos dados e o modelo linear ajustado.

Figura 5: Modelo de RLS ajustado para as variáveis Petrobras x barril de petróleo



Fonte: Autoras (2022)

Aos dados foram aplicadas as mesmas funções linearizáveis, e os resultados estão dispostos conforme Tabela 12 abaixo.

Tabela 12: Resultados para asformas funcionais Petrobras x barril de petróleo

Forma funcional	a	b	P-valor	R^2
Log-Log	-0,2301	0,5394	< 0,05	0,5767
Log-Lin	1,3043	0,0108	< 0,05	0,5398
Lin-Log	-6,359	3,3610	< 0,05	0,5012

Nota: *a* intercepto; *b* coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

Fonte: Autoras (2022)

O preço do barril de petróleo possui considerável atuação nas ações da Petrobras, dessa maneira, ao analisar o modelo Log-Log, quando ocorre um aumento de 1% no preço do barril de petróleo, ocorre um aumento de 0,5394% nas ações da Petrobras. O modelo Log-Lin, ao analisar o Ba taxa de crescimento nas ações da Petrobras baseado nos preços do barril de petróleo é de 1,08%. Considerando os coeficientes de determinação, afirma- se que o modelo Log-Log é o que melhor explica os dados em uma taxa de 57,67%.

A terceira análise de conjunto de dados foi feita para o índice Ibovespa e a Petrobras, os resultados das correlações estão dispostos na Tabela 13 .

Tabela 13: Correlações – Ibovespa x Petrobras

Correlação	Valor obtido	P-valor
Pearson	0,6252	< 0,05
Sperman	0,6019	< 0,05
Kendall	0,4460	< 0,05

Fonte: Autoras (2022)

O coeficiente de correlação linear de Pearson obtido foi de 0,6252, assim a correlação entre o Ibovespa e a Petrobras pode ser considerada moderada. Entretanto, o esperado neste caso seria uma correlação forte, pois as ações da Petrobras compõem de forma significativa o índice Ibovespa, como já destacado anteriormente. O coeficiente de correlação de Spearman obtido foi de 0,6019 e o coeficiente de correlação de Kendall foi 0,4460, podendo as variáveis ser consideradas tendo correlação moderada.

Cabe destacar que, em todas as três correlações de Kendall realizadas, pode-se observar que ou a correlação é considerada moderada ou fraca, isso ocorre devido a quantidade de dados, pois este é um modelo de correlação indicado para analisar poucos dados, como neste caso a quantidade de dados é grande, Kendall não se enquadra como a melhor opção para correlação.

O modelo de regressão linear entre o índice Ibovespa e a empresa Petrobras e suas respectivas estatísticas estão apresentados na Tabela 14.

Tabela 14: Regressão linear – Ibovespa x Petrobras

a	b	P-valor	R^2
73212	4990	< 0,05	0,3896

Nota: a intercepto; b coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

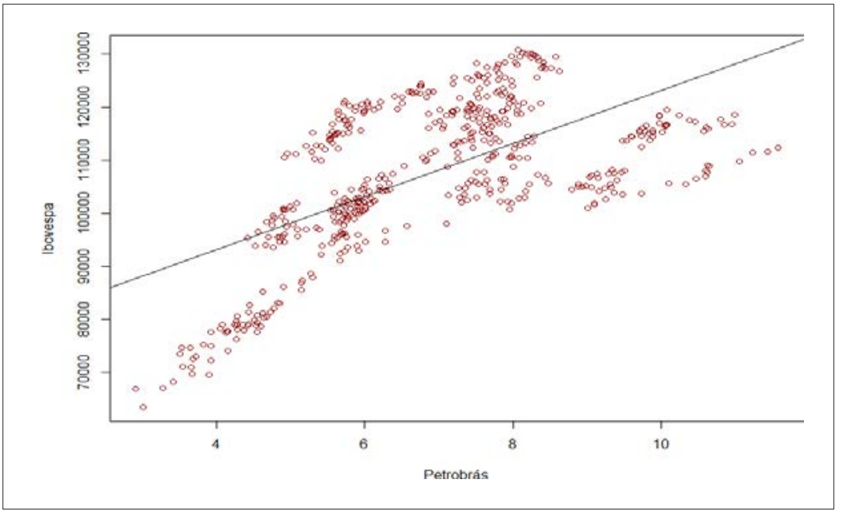
Fonte: Autoras (2022)

Ocoeficiente de determinação R^2, neste caso foi de 0,3896, ou seja, modelo explica apenas 38,96% da variabilidade dos dados. O modelo obtido, está disposto na Equação 4.

$$y = 73212 + 4990x \qquad (4)$$

O gráfico de dispersão com a reta da regressão se encontra na Figura 6.

Figura 6: RLS – Ibovespa x Petrobras



Fonte: Autoras (2022)

O mesmos modelo linearizáveis foram utilizados e os resultados estão representados pela Tabela 15.

Tabela 15: Resultados para asformas funcionais Ibovespa x Petrobras

Forma funcional	a	b	P-valor	R^2
Log-Log	10,8494	0,3835	< 0,05	0,5127
Log-Lin	11,2249	0,0511	< 0,05	0,4047
Lin-Log	36889	37282	< 0,05	0,4884

Nota: a intercepto; b coeficiente angular; R^2 coeficiente de determinação

Fonte: Autoras (2022)

Conforme já destacado anteriormente, as ações da Petrobras possuem parte significativa no índice Ibovespa, dessa forma, para o modelo Log-Log se houver um aumento de 1% nas ações da Petrobras, ocorre um aumento de 0,3835% nas ações do índice Ibovespa. Já o modelo Log-Lin, analisando o coeficiente B a taxa de crescimento no índice Ibovespa baseado nas ações da Petrobras é de 5,10%. Quando aplicado o modelo Lin-Log, obtêm-se o valor do crescimento no índice Ibovespa baseado nas ações da Petrobras de R$ 372,82. Observando os coeficientes de determinação, o modelo Log- Log é o que melhor explica os dados em uma taxa de 51,27%.

4 COMENTÁRIOS FINAIS

O petróleo sendo uma fonte de energia não renovável é a principal matriz energética da economia mundial. Dessa forma, as oscilações neste mercado possuem efeitos imediatos em uma escala mundial, pois a maioria dos países participam de sua compra e venda, logo seus preços são acompanhados de perto por investidores de todo o mundo.

O índice Ibovespa, sendo o principal índice da B3, desempenha o papel de indicador do comportamento das ações das empresas do Brasil. Nele, estão reunidas as empresas mais importantes do mercado de capitais do país. Dessa forma, a empresa estatal Petrobras é uma das empresas pertencentes a este índice, sendo a responsável pela extração, refino e distribuição do petróleo, estando presente entre as maiores empresas do mundo.

Como pudemos analisar, estas variáveis se associam de alguma forma, e assim, o objetivo da pesquisa era de averiguar uma possível relação entre as variáveis estudadas. Inicialmente foram aplicadas correlações para analisar a relação entre o índice Ibovespa e o preço bruto do barril de petróleo, as utilizadas foram as correlações de Pearson, Spearman e Kendall. Dentre os três coeficientes, o que apresentou maior correlação foi o coeficiente de Pearson, sendo considerada forte. Já as outras duas correlações foram consideradas moderadas. Como resultado, pode-se dizer que os preços do barril de petróleo possuem influência significativa sobre o índice Ibovespa.

O modelo de regressão linear simples entre estas variáveis é capaz de explicar somente 50,66% da variabilidade dos dados. Utilizando as formas funcionais alcançou- se modelos que possuem coeficientes de determinação melhores, como o modelo Log- Log, que neste caso explicou 63,93% da variabilidade dos dados.

O segundo par de variáveis estudados foi o barril de petróleo e a Petrobras em que nesta ordem, são a variável independente e dependente. Dentre as correlações investigadas, a que apresentou melhor resultado foi a de Spearman, com uma correlação considerada forte. Esse resultado leva-nos a crer que os preços do barril de petróleo atuam diretamente nas ações da Petrobras. O modelo obtido proveniente do ajuste de regressão linear simples resultou num coeficiente de determinação de 48,69%, porém uma maior variabilidade total dos dados é observada quando se utilizam as formas linearizáveis, como por exemplo, o modelo Log-Log explica que explica 57,67% da variabilidade dos dados.

Para finalizar, investigou-se a relação entre o índice Ibovespa e a Petrobras, e como visto no decorrer do trabalho, a Petrobras compõe a carteira teórica do Ibovespa de forma expressiva, ou seja, quando as ações da Petrobras sobem, o índice acompanha seu crescimento, e quando ocorre um declínio na mesma reflete na bolsa de valores (Ibovespa). Dentre os três coeficientes de correlação calculados, tanto o coeficiente de Pearson como o de Spearman foram classificados como moderados, e o de Kendall fraco. Inicialmente, com a pesquisa o esperado era uma correlação forte.

O coeficiente de determinação obtido procedente da regressão linear simples foi relativamente baixo, explicando apenas 38,96% da variabilidade total dos dados. Cabe ressaltar que o gráfico de dispersão deste conjunto de dados apresenta diversos outliers que podem ter influenciado os resultados obtidos. Quando aplicado os modelos linearizáveis, observou-se uma melhora nos índices, o modelo Log-Log resultou em um coeficiente de determinação capaz de explicar 51,27% da variabilidade dos dados.

Como trabalhos futuros, pode-se desenvolver a ideia inicial da pesquisa, onde se utilizaria o modelo de Correlação Condicional Dinâmica (DCC), aplicado a fim de prever correlações condicionais baseado em séries temporais, ou seja, se as variáveis estudadas se correlacionam de forma positiva ou negativa.

REFERÊNCIAS

B3. **Índice Bovespa (Ibovespa B3)** Carteira. 2022. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice- ibovespa--ibovespa-composicao-da-carteira.htm. Acesso em: 22 maio 2023.

BORDINO, I.; KOURTELLIS, N.; LAPTEV, N.; BILLAWALA, Y. Stock trade volume prediction with yahoo finance user browsing behavior. *In*: **2014 IEEE 30th International Conference on Data Engineering**. IEEE, 2014. DOI: https://doi.org/10.1109/icde.2014.6816733.

BORGES, B.; DUQUE, D.; VELOSO, F. A.; SENNA, J. J.; DAMASCENO, J.; PEREIRA, L. V.; PINTO, V. D. C. **Retomada em meio à incerteza**. 2020.

BRAUN, J. Aumento no preço dos combustíveis: 5 perguntas para entender o cenário no Brasil. **BBCNews-Brasil**, 2022.

DANCEY, C.; REIDY, J. **Estatísticas em matemática para psicologia**: Usando spss para windows. Porto Alegre, Artmed, 2006.

FERREIRA, G. Ibovespa sobe mais de 10% em abril, mas perdas em 2020 passam de 30%. **ValorInveste**-SãoPaulo, 2020.

FIGUEIREDO, D. Retrospectiva politize: Abril 2020. **Politize**, 2020.

FONTES, R. E. **Construção de um índice agrícola para o mercado derivativo de commodities agrícolas negociadas na BMF**. 2006. Tese (Doutorado em) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2006.

GIL,V.C.L.G. *I***mpacto do Preço do Petróleo no Mercado Accionista dos Estados Unidos, França, Holanda, Bélgica e Portugal**: Análise por Sector de Actividade. 2011. Tese(Doutorado) – Universidade Tecnica de Lisboa (Portugal), 2011.

GOMES,F.R. A bolsa de valores brasileira como fonte de informações financeiras. **Revista Perspectivas em ciencia da informação**, v. 2, n. 2, p.189-202, 1997.

HAMEED, A.; ASHRAF, H. Stock market volatility and weak-form efficiency: Evidence from an emerging market**. The Pakistan Develop**, 2006.

LUQUINI, R. H.; CRUZ, A. D. S. da; CASTRO, G. H. L. de. Verificação empírica da curva delaffer para o Brasil entre os anos de 1996 à 2014. **Economia & Região**, v. 5, n. 1, p. 31–52,2017.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; CALADO, V. **Estatística Aplicada e Probabilidade Para Engenheiros**: GrupoGen-LTC: Rio de Janeiro, 2021.

MORAIS, E.O.; RIBEIRO, K. L.; VELOSO, R. B.; VELOSO, M. D. D. M. Aplicação de modelos de regressão lineare não linear para estimativa de volume de biomassa e estoque de carbono. **Brazilian Journal of Development**, v.6, n.7, p.45621- 45632, 2020.

PETROBRÁS. Central de resultados - petrobrás desempenho financeiro. **Petrobrás**, 2020.

PETROBRÁS. **Quem Somos? Relatório de sustentabilidade de 2020**. 2020. Disponível em: https://petrobras.com.br/pt/quem-somos/perfil/. Acesso em: 22 maio 2023.

SARTIN, K. R.; JOHANN, A. R. G.; SOUZA, C. B. D.; SILVEIRA, M. A. Análise de correlação e regressão das exportações de carne bovina e de frango brasileira. Conjuntura Econômica Goiana – SEGPLAN. **Instituto Mario Borges de Estatísticas e estudos Socio econômicos**, 2015.

STEVENSON, W. J. **Estatística aplicada à administração**. [*S.l.*]: São Paulo: Harper Row do Brasil, 1981.

SUCOLOTTI, L. **Avaliação de desempenho de carteiras**: Markowitzx índice bovespa. 2007.

TAVARES, V. B.; PENEDO, A. S. T. Níveis de governança corporativa da b3: Interesse e desempenho das empresas - uma análise por meio de redes neurais artificiais. Contabilidade, Gestão e Governança, **Revista Contabilidade Gestao e Governanca**, v.21, n.1, p.40–62, abr. 2018.

VERAS, E. G. Transmissão de volatilidade de preços entre o petróleo e os índices das bolsas de valores. **Universidade Federal da Paraíba**, 2020.

YAHOO FINANCE. **IBOVESPA(BVSP)**, 2022. Disponível em: https://finance.yahoo.com/quote/%5EBVSP/history?period1=1585699200&period2=15 88204800&interval=1d&filter=history&frequency=1d&includeAdjustedClose=true. Acesso em: 22 maio 2023.

CAPÍTULO 11

ÁLGEBRA

Adriano Gomes de Santana: adrianosantana@utfpr.edu.br
Robson Willians Vinciguerra: robsonw@utfpr.edu.br
Wilian Francisco de Araujo: wilianw@utfpr.edu.br

Ao empenharmos esforços em um grande projeto, maior que nós mesmos, o tempo passa tão rápido que sem esperar chegamos ao fim de um ciclo. Aqui nos referimos aos 10 anos ensinando, e aprendendo Álgebra na Licenciatura em Matemática da UTFPR, câmpus Toledo.

A cada aula, orientação ou seminário que evocam nomes como Erastótenes, Pitágoras, Fermat, Galois, Noether, Lie, Hopf, Jacbson, viajamos mentalmente para cada época que estes grandiosos matemáticos viveram. Com os olhos fixos num emaranhado de letras, símbolos, operações e uns poucos números, imaginamos a vida de tais personagens. No que estavam pensando? Quais os problemas iniciais que queriam resolver. Ou que cara fizeram quando perceberam que, brincando despretensiosamente com números e letras, criavam uma nova área de estudo.

Há um consenso que uma boa cultura algébrica começa pelo entendimento do conjunto dos números inteiros. Suas operações e propriedades. Fatoração em primos e o teorema fundamental da aritmética. Passamos a estudar conjuntos e subconjuntos. Os conjuntos numéricos dos racionais, reais, complexos, quatérnios e além. A aritmética modular é o primeiro passo para abstrações mais elaboradas tais como polinômios, grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais e módulos. E por fim, a estrutura que dá nome a esse ramo da matemática, as álgebras (ou que recebeu o nome da área, não sabemos ao certo se o ovo ou a galinha veio primeiro).

O clássico teorema fundamental da aritmética, o qual diz que todo número natural, exceto 0 e 1, é um produto único de número primos, nos remete tanto à problemas clássicos da antiguidade, como atuais. O teorema de Pitágoras e construção das ternas pitagóricas é um deles. A resolução das equações de Diofanto outro. O pequeno e último teorema de Fermat, os testes de primalidade, números primos de Mersenne e a criptografia (SOUZA, 2018) são alguns dos problemas mais modernos da aritmética.

Estudar polinômios leva nossos pensamentos à fórmula de resolução babilônica. Nos lembra Tartáglia e Cardano (REMOR, 2021). Ao precoce e incompreendido Galois, que aos 17 anos resolveu um enorme mistério das equações polinomiais (SIMONETTI, 2015; REMOR, 2021), mas que não viveu o suficiente para ver o reconhecimento de seu trabalho.

É satisfatório ver como Emmy Noether dá seu toque feminino em lugar de destaque na teoria de anéis e módulos (CORDEIRO;VIEIRA, 2017), (CORDEIRO *et al*., 2018). Fascina a forma como as teorias de Lie, Hopf e Weyl, pertencentes em uma área chamada de matemática “pura” é tão aplicada. Ou ainda como Kiiti Morita eleva o estudo dos módulos para além da teoria de conjuntos.

É nesse sentimento que desejamos conversar com você, estudante de graduação ou entusiasta de matemática, que brinca com a álgebra, ou que é brinquedo dela, mas que sobretudo se diverte. Queremos retratar o que foram estes dez anos de álgebra para nós. Não com uma descrição de momento ou casos, mas evocando emoções e matemática, percorrendo as diversas áreas por nós trabalhadas.

Buscamos não ser muito superficiais, nem rigorosos além do necessário. Esperamos que uma boa ideia dos principais conteúdos de números, polinômios, geometria e cálculo seja suficientes para acompanhar este material sem dificuldades.

Esperamos que apreciem o que foi um pouco do ensino de álgebra destes 10 anos.

1 NÚMEROS

Todas as pesquisas, leituras e orientações realizadas, ou apresentações ouvidas sobre o tema de história da matemática, nos dão a impressão de que todo trabalho que se preze sobre o tema precisa, necessariamente, começar falando de ossos. Mais especificamente de alguma das diversas peças de ossos animais com marcações datados de 8 a 35 mil anos atrás (BOYER; MERZBACH, 2012). Nada mais conveniente para começar o livro, dado que algebrista era um termo designado para “restaurador de ossos” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 166).

De lá pra cá, muitas outras maneiras de trabalhar com números foram desenvolvidas pela humanidade e preservadas em seus registros. Há vários destes destacando o uso da matemática pelas civilizações suméria, babilônica, grega, hindu e arábica.

Não há dúvidas que a matemática tem seu grau de aplicabilidade. Porém, é curioso observar que nem sempre a preocupação humana relativa aos números se restringiu apenas a problemas práticos. Por exemplo, no início do século XIX foi encontrada uma placa de argila babilônica, data de aproximadamente 1800 a.C., contendo diversas ternas pitagóricas, isto é, listas de três números (a,b,c) satisfazendo a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

Se três números (a,b,c) satisfazer a relação $a^2 + b^2 = c^2$, então um triângulo com lados medindo a, b e c tem um ângulo oposto ao maior lado medindo 90º. Por outro lado, se o triângulo tem um de seus ângulos medindo 90º, a medida de seus lados satisfaz a identidade. Isso é o que diz o famoso teorema de Pitágoras.

A luz desse teorema, possuímos um método para verificar se uma região retangular está perfeitamente no esquadro. Por exemplo, podemos verificar se conseguimos formar em seu canto um triângulo de medidas (3,4,5), a qual é uma terna pitagórica. A grande questão aqui é que a terna (3,4,5) é suficiente para qualquer problema de esquadro, enquanto outras ternas tais como (11,60,61) seriam incômodas de se usar.

Mediante a isso, podemos nos perguntar qual seria a motivação do autor original da tábua de Plimpton 322? Simplesmente curiosidade? Uma brincadeira com números? Há quem levante a hipótese da motivação didática da tábua. Que ela seria usada para o ensino de novos matemáticos e “engenheiros”. Mas ainda nesta hipótese, não seria suficiente ensinar a terna (3,4,5)?

Uma outra ruptura de paradigma do pensamento prático de se trabalhar com números, ou de fazer matemática por hobby, aparece no meio da civilização Grega antiga. Precisamente no teorema de Pitágoras. Esse teorema, não simplesmente estabelecer uma terna pitagórica para os problemas de esquadros, ou criar um jogo no estilo "ache a próxima terna". O teorema de Pitágoras transcende o pensamento atual ao estabelecer uma regra universal, que toda terna pitagórica, conhecida ou não, deve respeitar.

Usar letras na matemática, tal como fazemos hoje, não era compreendido na época da Grécia antiga. Mesmo assim, o uso de uma representação genérica para se referir a um objeto matemático se tornou uma prática comum nessa civilização. Não que os gregos sejam a primeira civilização a usar termos como "um número"ou "uma medida"para representar valores desconhecidos. A própria Babilônia 1000 anos antes já possui uma "receita de bolo"para resolver algumas equações do 2º grau. A grande diferença aqui está em determinar uma regra universal respeitadas pelos números.

Muito dessa ideia grega está tão impregnado em no pensamento hoje que sequer nos damos conta. Por exemplo, quando falamos ou ouvimos a popular frase "a ordem dos fatores não altera o resultado". Fazemos referência à uma das propriedades de multiplicação de números inteiros. Com letas, estamos dizendo que na qual $xy = yx$ (entenda xy como x multiplicado por y, ou x vezes y).

A propriedade numérica $xy = yx$ pode parecer trivial, mas não é. Por exemplo, a expressão 3×4, ou “3 vezes 4” representa uma soma onde o 4 aparece 3 vezes, ou seja $4 + 4 + 4 = 12$. Já 4×3 representa $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. O fato destas duas distintas multiplicações resultarem no mesmo número é a propriedade universal que escrevemos $xy = yx$. E ainda, vale lembrar que essa propriedade está restrita a alguns elementos, como números, e não é válida para outros, como as matrizes.

Esta mistura de trabalhar a matemática como hobby, motivada pela busca de padrões universais, levou a humanidade encontrar diversos padrões e resultados relacionais aos números. Por exemplo os números primos. Até meados dos anos 70, o conceito de número primo não tinha particularmente aplicação alguma, eram pura matemática. Só em 1969 que tais números, e suas propriedades, encontraram utilidade na computação. Mais especificamente na criptografia de chave pública.

Vamos lembrar que um número inteiro n diferente de 0, 1 e -1, é primo se seus únicos divisores positivos são 1, n e $-n$. Segundo essa definição, números tais como 2, 3 e -5 são primos, já o número $14 = 2 \times 7$ não. Porém $14 = 2 \times 7$ é um produto de números primos. Na verdade, qualquer número inteiro diferente de 0, 1 e -1 pode ser representado como produto de números primos. E essa representação é única, a menos da ordem dos números e dos sinais. Este é o conhecido teorema fundamental da aritmética.

Um passatempo saudável para se fazer tanto acompanhado como solitariamente é procurar números primos ou decompor números compostos em números primos. Essa foi uma brincadeira que Eratóstenes, por volta do ano 200 a.C., resolveu jogar, criamo o primeiro método conhecido para encontrar números primos.

Tabela 1.1: crivo de Eratóstenes até 29

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7
$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$
$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$

Fonte: Os autores

Primeiro construímos uma tabela com os primeiros números naturais, os 100 primeiros ou os 1000 primeiros. Depois riscamos os múltiplos de 2, de 3, de 5 e assim por diante. É claro, sem eliminar os primeiros representantes desses múltiplos. O que sobra na tabela são os primeiros números primos.

Embora simples, o método de Eratóstenes não é eficiente para encontrar números primos grandes, digamos, maiores que um trilhão. Felizmente alguns séculos mais tarde, como relatamos em (SOUZA, 2018), Pierre de Fermat decide jogar o mesmo jogo com uma estratégia diferente. Aproveitando-se do produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Fermat observou que se um número pode ser escrito como a diferença de dois quadrados, o mesmo se fatora como o produto da diferença pela soma de suas raízes. Olhe por exemplo o que ocorre com o número $21 = 5^2 - 2^2 = (5 - 2)(5 + 2)$. É claro que o método de Fermat pode ser um pouco mais elaborado que isso, por exemplo $14 = (9/2)^2 - (5/2)^2$ de modo que precisamos considerar, em algumas circunstâncias, trabalhar com números racionais. O método de Fermat é descrito completamente em [Souza, 2018].

O desafio de escrever um número como produto de seus fatores primos aumenta quanto maior for o número. Fazer isso com um número com mais de 150 algarismos gastaria um tempo de aproximadamente $2{,}19 \times 10^{100}$ segundos. Isso usando o método de Fermat num dos mais modernos computadores. Parece muito? De fato, é dado que a idade estimada de nosso universo seja de 13 bilhões de anos, número esse representando por

$4{,}32 \times 10^{17}$ segundos, precisaríamos de muitos universos para resolver tal desafio de fatoração.

Se por um lado o problema de fatoração parece insolúvel, quando se trata de números grandes, por outro apenas dizer se um número é primo ou composto é relativamente simples. É claro, usando outros métodos.

O próprio Fermat provou um teorema no qual se pode verificar a primalidade com certa precisão. Fermat provou que se um inteiro positivo p é primo, e a é um inteiro positivo menor que p, então o resto da divisão de a^{p-1} por p é sempre 1. Veja por exemplo que $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ e $4^4 = 256$ divididos por 5 deixam resto 1. Já $3^3 = 27$ deixa resto 3 na divisão por 4. Percebes que 5, sendo primo, satisfaz este pequeno teorema de Fermat, como é conhecido na literatura, mas 4 que não é primo não satisfaz?

Com um pouco de paciência não é difícil de explicar como o pequeno teorema de Fermat funciona na prática para números grandes. Como o foco do teorema é sobre o resto de uma divisão, um aprofundamento a mais é necessário neste quesito.

Vamos escrever $\overline{a} = \overline{b}$ se os dois números inteiros a e b possui um mesmo resto na divisão por d. Por exemplo, se $d = 10$ então $\overline{137} = \overline{7}$ e $\overline{43} = \overline{3}$. Repare que esse exemplo possui uma propriedade curiosa: $\overline{137 + 43} = \overline{180} = \overline{0} = \overline{7 + 3}$ e $\overline{137 \times 43} = \overline{7 \times 3}$.

A notação barra também funciona se trocarmos o divisor para $d = 13$, agora neste caso temos $\overline{137} = \overline{7}$, mas $\overline{43} = \overline{4}$. Observe agora que ainda valem as operações $\overline{137 + 43} = \overline{7 + 4}$ e $\overline{137 \times 34} = \overline{7 \times 4}$. E a mesma propriedade também vale se trocássemos os demais números por quaisquer outros.

Em resumo, se nosso interesse é obter o resto da divisão de uma expressão numérica tanto faz resolver a expressão primeiro e calcular o resto depois, ou obter o resto de cada termo separadamente e calcular a expressão com seus restos.

Voltando ao pequeno teorema de Fermat, digamos que desejamos verificar se o número 67 é primo, o qual de fato o é. Como $0 < 2 < 67$, o resto da divisão de 2^{66} por 67 deve ser necessariamente 1. Calcular 2^{66} fazendo sucessivas multiplicações por 2 e depois dividir o resultado por 67 para obter seu resto será trabalhoso. Até por que 2^{66} é um número de 19 algarismos. Porém o que nos interessa é apenas o resto da divisão, o que faz uma considerável diferença.

Note que $66 = 2^6 + 2$. Disso podemos escrever $2^{66} = 2^{2^6} \times 2^2$. Usando as propriedades o resto na notação barra calculamos:

$$
\begin{aligned}
\overline{2^{66}} &= \overline{2^{2^6} \times 2^2} \\
&= \overline{(((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2 \times 4} \\
&= \overline{(((256)^2)^2)^2 \times 4} \\
&= \overline{((55)^2)^2)^2 \times 4} \\
&= \overline{((3025)^2)^2 \times 4} \\
&= \overline{((10)^2)^2 \times 4} \\
&= \overline{(100)^2 \times 4} \\
&= \overline{(33)^2 \times 4} \\
&= \overline{1089 \times 4} \\
&= \overline{17 \times 4} \\
&= \overline{68} \\
&= \overline{1}
\end{aligned}
$$

onde sempre que alguma potência ultrapassa o valor 67 o substituímos pelo seu resto na divisão por 67. O leitor tem a total liberdade para verificar tais cálculos pelos métodos tradicionais e observar que realmente o número 67 satisfaz o pequeno teorema de Fermat.

Fixado um número d, o qual chamaremos de divisor, dizemos que quaisquer dois números naturais a e b possuem a mesma classe de equivalência módulos d se $\overline{a}$ e $\overline{b}$ possuem o mesmo resto na divisão por d. Se isso ocorre escrevermos $a \equiv b \ \ mod \ d$ ou ainda que $\overline{a} = \overline{b}$ caso o número d seja bem entendido.

Embora o pequeno teorema de Fermat seja útil para encontrar números primos, o mesmo não é totalmente confiável. Repare que este teorema nos entrega uma propriedade dos números primos, mas não nos diz se outros números também tem esta propriedade.

O bom é que há outros métodos, mais elaborados e precisos, para determinar se um número é primo ou composto sem fatorá-los. O teste de Miller-Rabin, desenvolvido em 1976, e o algoritmo AKS (siglas dos nomes Agrawal, Kayal e Saxena), desenvolvido muito recentemente em 2006, são alguns exemplos.

O balanço entre a dificuldade do problema de fatoração em contraste com a facilidade de determinar se um número é primo ou composto possibilitou aos matemáticos Rivest, Adlean e Shamir desenvolverem em 1967 o primeiro algoritmo de criptografia de chave pública, hoje conhecido como RSA, a primeira aplicação praticada teoria dos números primos desde que a humanidade trabalha com eles. Os detalhes desse algoritmo foram estudados no trabalho de conclusão de curso (SOUZA, 2018).

Voltando ao tema do resto de divisão, a notação com barra a adotada anteriormente para simplificar as contas carrega implicitamente um conceito extremamente utilizado na álgebra, a ideia de classes de equivalência.

Aqui dizemos que a é a classe de equivalência do elemento d. A ideia de classe de equivalência se relaciona com uma outra definição denominada relação de equivalência. Dois números a e b que possuem o mesmo resto na divisão por um número d estão relacionados. Esta é uma relação de equivalência denominado "relação de equivalência módulo d". Assim podemos dizer que a e b possuem, ou pertencem, a mesma classe de equivalência.

Existem alguns critérios para chamarmos uma relação de relação de equivalência: primeiro, todo a deve estar relacionado consigo mesmo; segundo se a está relacionado com b, então b está relacionado com a; e por fim se a se relaciona com b e b com c, então a se relaciona com c. Note que estas três condições valem para o caso em que a relação se configura como possuir o mesmo resto na divisão por um número d dado.

A ideia de classes de equivalência é como organizar seu guarda-roupas pelas cores das peças. Uma camisa vermelha e uma meia da mesma cor não são iguais, mas estão na mesma classe. O que fazemos aqui é “olhar para as cores”, e não para as peças.

Você já ouviu o conceito de equivalência antes e talvez não saiba. Desde o 6º ano do ensino fundamental somos ensinados de que as frações $1/2$ e $2/4$ são equivalentes, e não iguais. De fato, não são a mesma fração, pois os números dos numeradores e denominadores são diferentes. Mas representam o mesmo número racional.

O termo frações equivalente não é à toa. Uma fração a/b nada mais é que um par de dois números inteiros (a,b) desde que $b \neq 0$, e duas frações a/b e c/d são equivalentes se vale a igualdade da multiplicação cruzada $ad = bc$ ou, equivalentemente, a identidade $ad - bc = 0$.

A identidade acima realmente estabelece uma relação de equivalência entre os pares de inteiros (a,b) onde $b \neq 0$. Para quem está acostumado com a linguagem de conjuntos e produto cartesiano, esta é uma relação sobre o conjunto $Z \times Z^*$. A diferença aqui é que os matemáticos optaram por representar esta classe de equivalência do par (a,b) pela fração a/b ao invés da barra (a,b).

A vantagem de olhar para o conjunto dos números racionais dessa forma é poder dar uma outra perspectiva às fórmulas de soma e produto de frações e ainda poder formar frações com elementos que não são números. Por exemplo, polinômios.

2 GRUPOS

2.1 AXIOMAS DE GRUPOS

As equações polinomiais, aquelas da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$, vem a muito tempo atraindo a atenção dos matemáticos. Sabe-se que matemáticos babilônicos que viveram a mais de mil anos antes de Cristo já sabiam resolver a equação de grau dois, aquelas da forma $a + bx + cx^2 = 0$. Muito tempo depois, já no século XVI, Tartáglia e Cardano conseguiram obter fórmulas de resolução para as de grau 3. Pouco tempo depois, Ferro, aluno de Cardano, determina uma fórmula para a equação de grau 4.

Dado o curto prazo entre as resoluções dos problemas de graus 3 e 4, acreditava-se que a matemática da época está tão avançada que logo achariam fórmulas para as equações de graus 5, 6 e assim por diante. Qual foi a surpresa quando Abel e Galois demonstraram que isso nunca aconteceria. De fato, não há, seguindo as regras clássicas de usar apenas operações fundamentais e radicais, fórmulas gerais para resolver as equações polinomiais de graus maiores que 4.

A ideia de Galois foi avaliar como se comportam as permutações das raízes dos polinômios. Este trabalho dá origem posteriormente ao conceito de grupo. Um grupo é a estrutura formada por um conjunto G com uma operação binária $*$, estrutura essa denotada por $(G,*)$, satisfazendo três axiomas

- Para todo $f, g, h \in G$, $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Existe $e \in G$ onde para todo $g \in G$, $e * g = g$ e $g * e = g$
- Para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = e$ e $g^{-1} * g = e$

As propriedades acima são respectivamente denominadas de associatividade, existência do elemento neutro, e existência do inverso.

Se ainda para todo $f, g \in G$, vale que $f * g = g * f$, o famoso "a ordem dos fatores não altera o resultado", então dizemos que $(G,*)$ é um grupo abeliano, nome dado em homenagem a Abel.

3 GRUPOS NUMÉRICOS

Os exemplos mais óbvios de grupos são os conjuntos numéricos. Por exemplo, se G é o conjunto dos números inteiros Z e $*$ é a operação de adição $+$, então (Z ,$^+$) é um grupo. Da mesma forma (Q ,$^+$), (R ,$^+$), (C ,$^+$) são grupos.

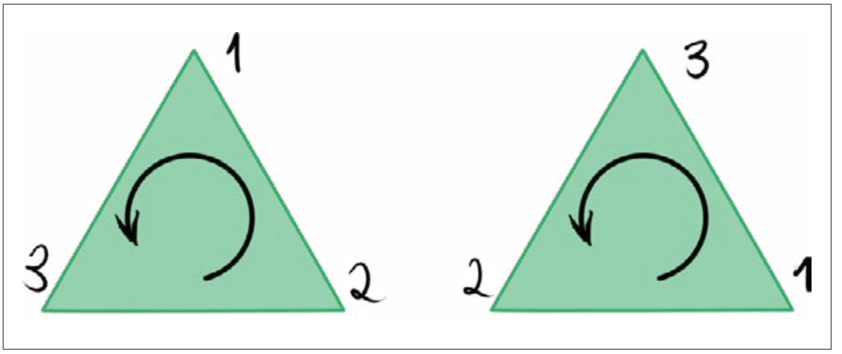
É claro que nem tudo pode ser grupo. Por exemplo, (N,$^+$) não é um grupo, pois qualquer número, n, exceto o zero, possui seu inverso aditivo $-n$ fora do conjunto N. Também não constitui-se um grupo o conjunto (Z,$^-$), pois com um breve exemplo tal como $2 - (3 - 1) = 0$ e $(2 - 3) - 1 = -2$ nos mostra que a operação – não é associativa. Em geral, qualquer conjunto G com uma operação $*$ associativa e com elemento neutro dará origem a um grupo. Basta tomarmos o subconjunto $H \subseteq G$ dos elementos que possuem inversos. Neste caso o grupo é formado pelo conjunto H e a operação $*$. Isso corre por exemplo com a operação de multiplicação $\cdot$ em qualquer dos conjuntos N, Z, Q, R ou C. Em todos estes conjuntos a operação de multiplicação é associativa e 1 é seu elemento neutro. Em N o único elemento que possui um inverso multiplicativo é o número 1, neste caso o subconjunto $H \subseteq$ N é $H = \{1\}$. Em Z ha dois elementos que possuem inverso multiplicativo, 1 e -1, assim formamos o grupo $(\{1,-1\},\cdot)$. Para os conjuntos numéricos Q, R ou C basta retirar o número 0.

4 GRUPOS SIMÉTRICOS

Dadas duas funções de um conjunto nele mesmo $f, g : X \to X$ podemos criar uma terceira função a partir da composição $g \circ f : X \to X$ na qual para todo $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Sempre existe uma função especial $e : X \to X$ que associa cada elemento a si mesmo, isto é $e(x) = x$. Neste sentido, a composição $\circ$ de funções de um conjunto nele mesmo é associativa e possui o elemento neutro e. Isto é, para quaisquer funções f, g, $h : X \to X$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ e para toda função $f : X \to X$, $f \circ e = f$ e $e \circ f = f$.

O que temos aqui é que o conjunto das funções de X em X, com a composição de funções, satisfazem quase todas as propriedades que definem um grupo, faltando apenas a existência do inverso. Mas então, podemos escolher apenas as funções de X que possuem uma inversa e formar o conjunto S_X. Assim $(S_X, \circ)$ é um grupo, denominado o grupo de permutações dos elementos de X. Ou nome que se dá para S_X é o de grupo simétrico de X.

Figura 2: Rotação de 120º do triângulo



Fonte: os autores

O nome grupo de permutações para S_X pode ser explicado de uma forma prática.

Considere $X = \{1,2,3\}$ um conjunto com três elementos. Uma função invertível sobre este conjunto nada mais é como uma reorganização, ou seja uma permutação, da ordem de seus elementos. Por exemplo, a função f tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 3$ pode ser denotada por

$$f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$$

Não é à toa que os grupos S_X, neste caso é denotado por S_3.

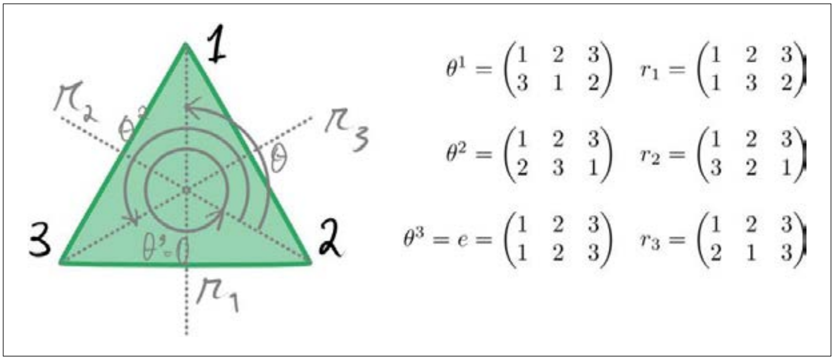
O grupo S_3 possui uma propriedade especial por também representar o conjunto das possíveis simetrias do triângulo equilátero.

Tome um triângulo equilátero e enumere seus vértices, digamos no sentido anti-horário. Qualquer manipulação desse triângulo que seja irreconhecível ao seu final, exceto por causa da enumeração, é denominado uma simetria. Cada simetria desloca a posição de cada vértice para uma nova posição. Por exemplo, ao girar o triângulo por um ângulo de 120º o vértice 1 assumirá a posição do vértice 2, o vértice 2 a posição do vértice 3 e o vértice 3 a posição do vértice 1, Figura 2.1.

Um triângulo equilátero possui 6 possíveis simetrias, três rotações a partir dos ângulos 120º, 240º e 360º, e três reflexões a partir de cada uma de suas alturas, exatamente o mesmo número de elementos de S_3, veja Figura 2.2.

No geral, o conjunto das simetrias de um polígono regular de n lados é um grupo com a operação de composição. Denominamos este de grupo diedral de ordem n, e o denotamos por D_n.

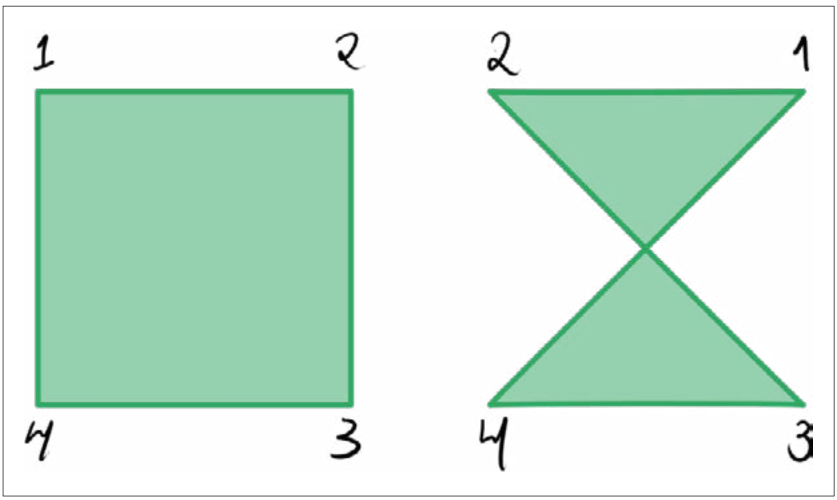
Figura 2.2: Rotação de 120º do triângulo



Fonte: os autores

No caso em que $n = 3$ vale a igualdade $S_3 = D_3$, mas tal igualdade é falsa para qualquer $n > 3$. Por exemplo, no grupo das permutações de 4 objetos S_4 a função $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ não representa nenhuma das 8 simetrias de D_4 uma vez que permutar os vértices adjacentes 1 e 2 sem mover os demais resultaria em uma deformação do quadrado, veja Figura 2.3.

Figura 2.3: A "simetria" do quadrado que falhou



Fonte: os autores

5 GRUPOS DE MATRIZES

Uma interessante classe de grupos, fonte de muita pesquisa, é a classe dos grupos lineares $GL_n(k)$. Este grupo é formado por matrizes quadradas de ordem n, cujos elementos das entradas estão em k e a multiplicação é a multiplicação usual de matrizes. Normalmente k é o conjuntos dos números reais R ou dos complexos C, mas pode ser um outro conjunto satisfazendo certas regras.

Pedimos ao leitor confiar de que para qualquer três matrizes A, B e C, temos associatividade $A(BC) = (AB)C$. Além disso, a matriz identidade I, a matriz com 1 em todos os elementos da diagonal e 0 nas outras entradas, é o elemento identidade da multiplicação de matrizes.

Ocorre que nem toda matriz A, existirá uma matriz B tal que $AB = BA = I$, isto é, há matrizes que não possuem inversos. Isso nos diz que nem toda matriz é elemento de um grupo linear $Gl_n(k)$. De fato, o conjunto das matrizes de $GL_n(k)$ é formado apenas pelas matrizes invertíveis.

Toda matriz também pode ser vista como uma função. Por exemplo, considere $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}\times\mathrm{R}$ o conjuntos dos pares ordenados de números reais (x,y). Seja a função $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ tal que $T(x,y)= (2x - 3y, x + y)$. Se representarmos os pares (x,y) e $(2x - 3y, x + y)$ como matrizes coluna, então a regra de define T pode ser presentada pela multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix}$$

Generalizando, as matrizes quadradas de ordem n representam funções de R^n em R^n. Tais funções, que podem ser representadas por matrizes, são denominadas transformações lineares. Uma transformação linear será uma função invertível se, e somente se, a matriz[1] que a representa é invertível. Por causa disso $GL_n(k)$ é também denominado grupo das transformações lineares invertíveis.

Se isso não é o suficiente para você tornar o conteúdo de matrizes seu conteúdo de matemática favorito, saiba que elas conseguem representar coisas que nem parecem numéricas.

1 Se estivéssemos falando da matriz de uma transformação linear de forma precisa, deveríamos ter mencionado o conceito de base de um espaço vetorial. Entretanto, estamos propositalmente suprimindo esta informação para sermos claros e práticos. Se isso não agradar o leitor, então todas as bases não mencionadas são as canônicas.

René Decartes, e seus contemporâneos, conseguiram representar os pontos de um plano por pares de números reais (x,y). Para isso basta definir um sistema de retas ortogonais e marcadas com os números reais. Como as matrizes quadradas de ordem 2 representam funções que levam pares (x,y) a outros pares (x',y'), tais matrizes representam uma movimentação dos pontos no plano. Agora veja o que a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ faz ao quadrado no plano de vértices

$A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1,-1)$.

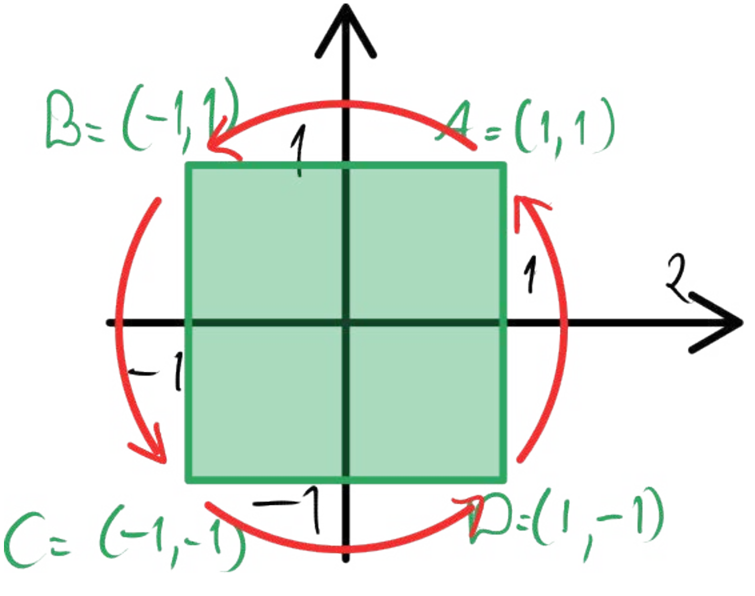
Para ver o que acontece, vamos ver a ação de M sobre o primeiro vértice A.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que o resultado é a coordenada do ponto B. Não só isso, a matriz M também leva o ponto B em C, C em D e o ponto D em A. Ou seja, a matriz M rotacionou o quadrado do plano por um ângulo de 90°, veja Figura 2.4.

Você deve se lembrar que a alguns parágrafos atrás dissemos que a rotação de 90° de um quadrado por uma simetria é um elemento do grupo diedral D_4. Mas também a matriz M anterior realiza uma rotação de 90°, isso significa que M é um elemento do grupo D_4? Seria o grupo linear $GL_2(\mathbb{R})$ igual a D_4?

Figura 4: Rotação de 90° com matrizes



Fonte: os autores

As respostas as questões anteriores é não e não. Primeiro por que em $GL_2(\mathrm{R})$ existem infinitas matrizes, enquanto D_4 é formado por apenas 8 elementos. Outra justificativa é a natureza desses elementos. A matriz M não é a simetria de rotação de 90º do quadrado, a função em R^2, representando o plano, obtida pela multiplicação por M realiza uma rotação de 90º que mantém todos os pontos do quadrado de vértices A, B, C e D na mesma região.

Embora D_4 e $GL_2(\mathrm{R})$ não seja o mesmo grupo, podemos obter um conjunto de 8 matrizes de $GL_2(\mathrm{R})$ que se comportem de forma parecida com os elementos de D_4. Este conjunto evoca o conceito de subgrupo, ou seja, é um grupo menor dentro de um grupo maior. Com esse subgrupo podemos obter
−1 resultados relevantes referentes a D_4, mas olhando para matrizes de $GL_2(\mathrm{R})$.
1 Esse é um trabalho comum na álgebra, estudar um objeto, mas olhando para outros que se comportam de maneira similar.

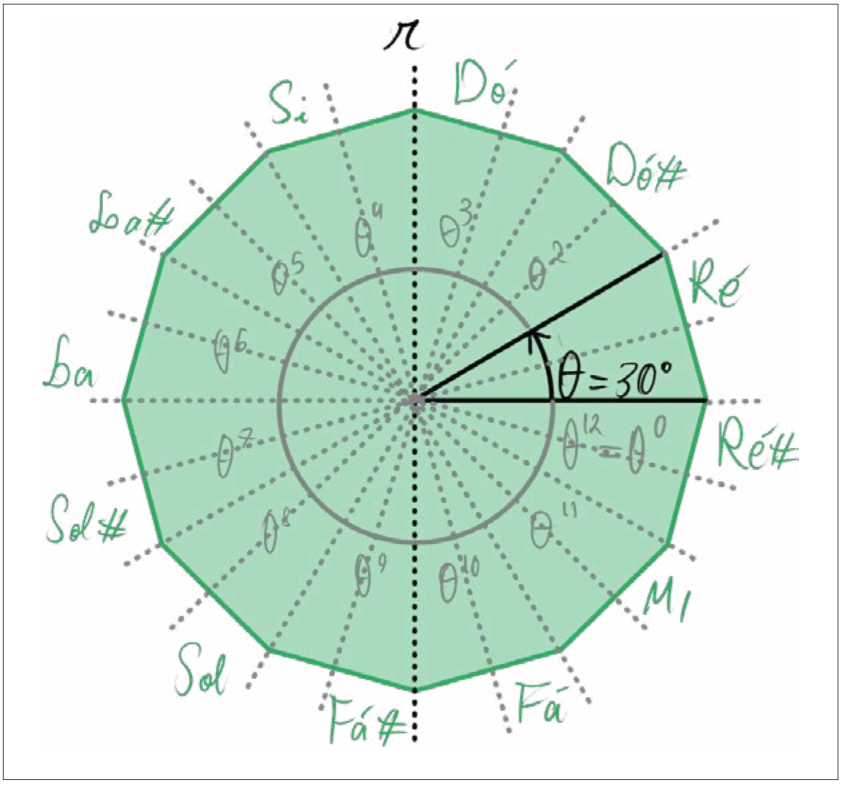
6 OS GRUPOS E A MÚSICA

Tão satisfatório como estudar grupos é ouvi-los. Isso pode soar estranho, mas é exatamente o que você vai encontrar no trabalho de conclusão de curso (BUZINARO, 2019).

Não é de agora que a matemática é um instrumento fundamental para a música. Tanto isso é verdade, que a própria escala das sete notas musicais mais conhecida foi criada na escola pitagórica. Posteriormente este conjunto de notas sofreu algumas correções por Andreas Werckmeister, dando origem a escala temperada, ou cromática. E isso, não sem a ajuda fundamental proporcionada pelos logaritmos.

Tal como os pitagóricos e Werckmeister se propuseram a estudar a música clássica com ferramentas clássicas da matemática tal como as frações e o logaritmo, Allen Forte se propôs a analisar algumas composições musicais modernas. E uma das ferramentas fundamentais para isso foi a teoria de grupos.

Figura 5: Notas musicais e o dodecágono



Fonte: os autores

As notas musicais na escala temperada se dividem em 12 notas fundamentais. Dispondo essas doze notas em um círculo formamos um polígono regular de doze lados, denominado dodecágono, veja Figura 2.5. O grupo que é ferramenta para trabalhar música com essas notas é o mesmo que age com simetrias desse polígono, ou seja, o grupo Diedral D_{12}.

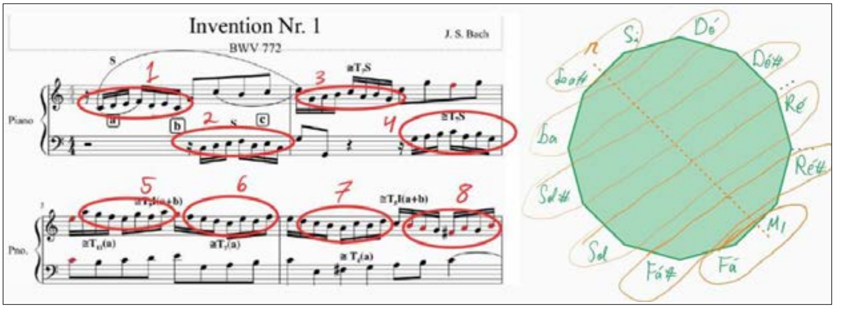
Se θ denota a rotação de 30º do dodecaedro e *r* a reflexão pelo eixo do vértice que está a nota Dó, então as 24 simetrias que constituem os elementos do grupo diedral D_{12} podem ser denotados por $e = \theta^{12}, \theta, \theta^{2}, \ldots, \theta^{11}$ e $r, r\theta, r\theta^2, \ldots, r\theta^{11}$.

Johann Sebastian Bach usa e abusa do grupo diedral na partitura invenção nº 1 de "O cravo bem temperado". Podemos ver que há uma sequência de notas cujos símbolos parece se repetir em vários outros lugares da partitura. Curiosamente, esta sequência não se apresenta com as mesmas notas nestes outros locais marcados, mas transladado na vertical, ou invertido de baixo para cima, como se houvesse um espelho.

O uso do grupo diedral na composição de Bach fica claro na Figura 2.6. A primeira sequência de 7 notas circuladas se refere as notas dó, ré, mi, fá, ré, mi e dó, já a segunda sequência é formada pelas notas lá, sol, fá, mi, sol, fá e lá. Compare estas duas sequências com o dodecágono ao lado. A simetria de reflexão, representada pela reta pontilhada, transforma a primeira sequência na outra. A reflexão em questão troca dó com lá, ré com sol, mi com fá e fá com mi. Compare.

Não obstante, as outras sequências de notas circuladas também são obtidas da primeira por alguma outra simetria do grupo diedral. Somente algumas correções são realizadas por Bach nas notas pintadas em vermelho. Essas não são obtidas pelas simetrias, mas foram substituídas para que a peça permanecesse no campo harmônico escolhido pelo compositor.

Figura 6: Tema repetido em composições clássicas



Fonte: os autores

O trabalho (BUZINARO, 2019) ainda aborda como o grupo diedral D_{12} e outros grupos podem ser usados para analisar músicas clássicas, modernas, eruditas e populares, as formações de acordes, seus encadeamentos e ainda sequências de intervalos musicais.

Vale ressaltar que não se sabe ao certo se Bach, e outros demais compositores, realmente sabiam a matemática que estavam aplicando nas suas composições, ou se eram levados naturalmente pela beleza da arte.

7 ESTRUTURAS DE GRUPO

Mesmo diante de tantos exemplos, e aplicações esplendorosas da teoria de grupos, sempre haverá aqueles que preferem a matemática pela matemática. Ou no caso dessa seção, o grupo pelo grupo. São pessoas que se dedicam exclusiva e exaustivamente a provar teoremas. Quando perguntam aos alunos "pra que alguém usa isso?", alguns dirão: "para ser aprovado no curso". Porém outros alunos dirão que é arte, e ainda, outros dirão que é para a contemplação da verdade.

Para aqueles que querem estudar a teoria pela teoria, existem os subgrupos. Dado um grupo $(G,*)$, um subgrupo é formado por um subconjunto H de G tal que com a mesma operação $*$, $(H,*)$ é um grupo. Um exemplo é o subgrupo dos números pares de $(Z,^{+})$. O resultado da soma e da diferença de números pares é par, 0 é par e o negativo de um par é par. Este subgrupo dos números pares é denotado por $(2Z,^{+})$.

Joseph-Louis Lagrange provou que se (G,∗) é um grupo com um número n de elementos, e $(H,*)$ é um subgrupo de $(G,*)$ com d elementos, então d é um divisor de n. Não à toa, a questão de possíveis subgrupos para o caso finito foi estudada em Remor e Araújo (2020), em conjunto com os teoremas de Peter Ludwig Mejdell Sylow; ou ainda em Previatti (2016), que aborda o mesmo tema e o teorema de Hall.

Há também as relações de equivalência. Se $(G,*)$ é um grupo e $(H,*)$ um de seus subgrupos, então dizer que $a,b \in G$ estão relacionais se $a * b^{-1} \in H$ é uma relação de equivalência. Disso os elementos de G podem ser agrupados em classe de equivalência. Se $(H,*)$ satisfaz algumas condições, este conjunto de classes de equivalência dá origem a um novo grupo.

Vamos voltar ao exemplo do grupo dos inteiros $(Z,^{+})$ e seu subgrupo de números pares $(2Z,^{+})$. Neste caso há somente duas classes de equivalência, dos números pares, classe essa representada por 0 e dos ímpares, representada por 1. O novo grupo que surge desses objetos é denotado por $Z_2 = \{0,1\}$. Não é complicado ver como são as operações em Z_2 , $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, $\overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$ e $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$. Uma generalização desse exemplo dá origem à aritmética modular, a qual contempla a relação de equivalência modular que mencionamos no uso da criptografia e dos critérios de primalidade.

O trabalho, segundo Grassi e Vinciguerra (2021), ainda relaciona a teoria de grupo com uma outra estrutura denominada anel. Neste caso, não só uma rica teoria foi estudada, mas diversos exemplos sofisticados como o grupo dos quatérnios, produto direto de grupos, representações, e o Teorema de Meschke.

Em Remor e Araújo (2020) é feita uma discussão sobre o Teorema de Lagrange e os Teoremas de Sylow. Os Teoremas de Sylow nos diz algumas condições para que um grupo G, com infinitos elementos, possua um subgrupo com uma quantidade determinada de elementos. Aprofundando um pouco mais no trabalho (PREVIATTI, 2016), continuamos essa discussão falando dos subgrupos de Hall. Tudo isso pois, sabendo os subgrupos de um grupo, conhecemos muitas outras informações sobre a sua estrutura.

Não poderíamos também deixar de comentar o trabalho de Merli e Araújo (2014), que para além da teoria e da prática, relaciona o conteúdo de grupos com o ensino-aprendizagem.

8 ANÉIS

8.1 INTRODUÇÃO AOS ANÉIS

Embora a teoria de grupos contemple uma única operação, muitas outros objetos possui mais de uma operação definida sobre um mesmo conjunto. Isso é o caso dos exemplos já citados referentes aos conjuntos Z, Q, R e M$n(k)$ onde k é um dos três exemplos anteriores. Em todos esses exemplos há duas principais operações: uma adição + *e* uma multiplicação $\cdot$. Estas duas operações casam numa perfeita relação denominada distributividade. Dizemos assim que a multiplicação $\cdot$ é distributiva com relação a adição, pois para toda terna de elementos a,b e c temos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Essa valsa de operações estabelece o conceito da estrutura de anel, da qual os exemplos acima citados nada mais é que uma ínfima amostra de um gigantesco universo. Por definição, dizemos que um conjunto A com duas operações + e $\cdot$ é um anel se: **1.** $(A,+)$ é um grupo abeliano; **2.** a operação $\cdot$ é associativa; **3.** a operação $\cdot$ possui um elemento neutro 1_A e **4.** é distributiva com relação *a* +.

Enquanto em um grupo o nome da operação depende da natureza do exemplo, num anel + e $\cdot$ são sempre denominadas por soma, ou adição, e produto, ou multiplicação, respectivamente. O anel A é também denotado por $(A,+,\cdot)$. Porém, quando a estrutura é muito bem conhecida a mesma é representada apenas pelo seu conjunto A. Esse é o caso dos exemplos Z, Q, R e M$n(k)$ uma vez que dificilmente alguém escreve $(Z,+,\cdot)$.

Dependendo de algumas propriedades adicionais satisfeitas pelo anel $(A,+,\cdot)$ o mesmo recebe alguns nomes especiais. Dizemos que o anel é:

- **comutativo:** se $ab = ba$ para todo par $a,b \in A$;

- **domínio:** se sempre que um produto $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;

- **de divisão:** se para todo $a \in A \backslash \{0\}$, existe um $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = 1$ e $a^{-1}a = 1$;

- **domínio de integridade**: se o anel é comutativo e um domínio;

- **corpo:** se o anel é comutativo e de divisão.

Em nossos exemplos, Z é um domínio de integridade, mas não um corpo, pois não é um anel de divisão. Q, R e C são corpos. Já $M_n(\mathrm{R})$, se $n \geq 2$, não é nem comutativo, nem um domínio e sequer um anel de divisão.

8.2 ANEL DE POLINÔMIOS

Dado um anel A qualquer podemos formar um anel maior $A[x]$ denominado anel polinômios na indeterminada x com coeficientes em A. Os elementos de $A[x]$ são expressões da forma $p(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Muitas vezes queremos substituir o valor de x e calcular a expressão $p(x)$, ou ainda igualar $p(x) = 0$ e resolver a equação, mas aqui não. O que nos interessa no anel de polinômios são as expressões completas $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.

Dados dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$, a soma resulta no polinômio $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ...$, ou seja, somando os coeficientes dos monômios em x de mesmo grau. A multiplicação é um pouquinho mais complicada de se fazer. Se $p(x)q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...$, então cada coeficiente c_i dado por:

$$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + ... + a_ib_0.$$

No anel de polinômios A[x], A é considerado um subanel. Se A é um anel comutativo, então $A[x]$ é comutativo. Se A é um domínio, então $A[x]$ é um domínio. Consequentemente, se A é um domínio de integridade, isto é um domínio e comutativo, então $A[x]$ também será.

É importante observar que nem tudo é passado ao anel de polinômios. Por exemplo,

$A[x]$ nunca será um corpo, mesmo que A o seja.

Algo que é interessante de se ressaltar são as propriedades específicas do anel de polinômios R[x]. O anel R[x] possui uma divisão euclidiana similar à divisão em Z, isto é, com divisor, dividendo, quociente e resto. Disso segue que em R[x] há ainda os conceitos de múltiplos, divisores, elementos primos, fatoração e inclusive uma espécie de aritmética modular. Tais conceitos foram estudados no trabalho de Remor *et al.*(2019).

Dado que $A[x]$ é um anel, e que sempre podemos formar o anel de polinômios sobre um anel, podemos formar o anel de polinômios sobre um anel de polinômios da forma $A[x][y]$. Poderíamos ainda acrescentar uma outra indeterminada $A[x][y][z]$, ou ainda continuar indefinidamente. Ocorre que, como não há diferenças significativas entre os anéis $A[x][y]$ e $A[y][x]$, denotamos estes simplesmente por $A[x,y]$. O Anel $A[x_1,\ldots,x_n]$ é denominado o anel de polinômios em n indeterminadas com coeficientes em A. Tais anéis possuem suas propriedades e aplicações, tal como os demais.

8.3 ANEL DE FRAÇÕES

Embora o conjunto dos números inteiros resolva o problema dos elementos simétricos com relação à adição do conjunto dos números naturais, de modo que a equação $2+x=0$ passa a ter solução em Z, ainda deixa a desejar quando pensamos na operação de multiplicação.

Geralmente, para resolver uma equação utilizamos as propriedades simétricas da adição (passa do outro lado subtraindo) e de multiplicação (passa do outro lado dividindo). Por exemplo, para encontrar o valor de x na equação $3x + 4 = 10$, primeiro subtraímos 4 em ambos os lados da igualdade, ficando com $3x = 6$. Depois dividimos os dois lados por 3, o que nos dá $x = 2$

O "dividir por 3" é possível em Z no exemplo acima pois 6 é um múltiplo de 3, mas não é possível para a equação $3x = 1$. Para resolver esse problema, é necessário um anel maior, que além de conter os números inteiros, contenha também o número 1/3. Um exemplo de tal anel é Q.

O problema apresentado acima nos remete a necessidade de frações na teoria de anéis. A ideia é a mesma que comentamos na seção 2 sobre as frações em Q. Um elemento de Q é uma fração $\frac{a}{b}$ onde a é um inteiro qualquer e b é um outro inteiro, mas diferente de *zero*.

Frações diferentes podem representar o mesmo número, como por exemplo $1/2 = 2/4$, a resposta para isso é que a fração é uma classe de equivalência, e o par numerador e denominador é um representante para essa classe.

Se A é um domínio de integridade, ou seja, comutativo e tal que não exista pares de elementos não nulos a e b cujo produto $ab = 0$, então podemos procurar subconjuntos $S \subseteq A$ para ser denominadores de frações. Aqui, o conjunto S deve satisfazer três propriedades: **1)** a identidade $1_A \in S$; **2)** se $a,b \in S$, então o produto $ab \in S$ e **3)** $0 \notin S$. Dados estes elementos, podemos formar o anel de frações AS^{-1}, cujos elementos são frações $\frac{a}{s}$ que é a classe de equivalência do par ordenado (a,s) onde $a \in A$ e $s \in S$.

Bom, há muita coisa que explicar aqui. Antes disso observe nos exemplos com $A = Z$ e $AS^{-1} = $ Q. Aqui como os denominadores das frações $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ pode ser qualquer inteiro não nulo, temos que S é este conjunto. Ou seja, S contém todos os números inteiros, exceto o *zero*.

Agora, voltando para a construção de AS^{-1}. Primeiro, se $\frac{a}{s}$ é uma classe de equivalência do par (a,s), então deve existir uma relação de equivalência entre estes pares. Tal relação é o que conhecemos como multiplicação cruzada. Dados dois pares (a,s) e (b,t) com $a,b \in A$ e $s,t \in S$, dizemos que este estão relacionados se $bs = at$.

Também, como estamos afirmando que AS^{-1} é um anel, devemos pelo menos indicar como são feitas a soma e o produto. Para isso basta ver qual é o papel de S neste novo anel. Cada elemento $\frac{1}{s}$ de AS^{-1} deve representar, como nos números racionais, o inverso de $s \cong \frac{s}{1}$.

Assim, uma outra forma de pensar a fração é escrever $\frac{a}{s} = as^{-1}$. Nesta escrita, uma regra para a multiplicação fica fácil, pois $(as^{-1})(bt^{-1}) = (ab)(st)^{-1}$ (lembrando que o anel é comutativo).

A fórmula da soma requer um pouco mais de detalhes. Se $s,t \in S$, então $1 = ss^{-1}$ e $1 = tt^{-1}$, disso temos que:

$$
\begin{aligned}
& as^{-1} + bt^{-1} = as^{-1} \cdot 1 + bt^{-1} \cdot 1 \\
& = as^{-1} \cdot tt^{-1} + bt^{-1} \cdot ss^{-1} \\
& = ats^{-1}t^{-1} + bss^{-1}t^{-1} \\
& = (at + bs)(st)^{-1}
\end{aligned}
$$

Esta última identidade, junto com a fórmula $(as^{-1})(bt^{-1}) = (ab)(st)^{-1}$ nos dão as seguintes identidades para realizar a soma e a multiplicação em AS^{-1} $\frac{a}{b} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$ e $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ que por sinal já conhecemos como frações de $\mathbb{Q}$.

Mas o que fazer quando A não é um domínio de integridade? Na verdade, essas generalizações não param por aí. Mesmo no caso em que o anel não seja um domínio de integridade, uma construção similar pode ser realizada. É claro, S deverá satisfazer condições adicionais. Porém, neste caso, o anel obtido nem sempre será algo com propriedades tão bem comportadas. Para obter maiores detalhes sobre o assunto, o leitor poderá se aventurar no trabalho de Lamb e Vinciguerra (2021b).

8.4 DERIVAÇÕES SOBRE ANÉIS

Um assunto primordial e, por isso presentes na maioria dos cursos de graduação, é a derivação. Estamos aqui tratando de funções reais

$f : R^n \to R^m$ sobre uma ou mais variáveis reais. Por exemplo, a função polinomial real $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ tem como derivada uma outra função real $\partial_x(f) := 6x^2 - 2x$. A derivada desempenha um papel relevante no estudo de uma determinada função. Por exemplo, é a partir das derivadas que podemos determinar os máximos e mínimos da função.

Como todo bom curso de cálculo ensina, as derivadas gozam de diversas propriedades. Duas que se destacam são a fórmula da derivada para a adição e a regra de Leibniz para o produto. Regras estas dadas respectivamente por:

$$\partial_x(f+g) = \partial_x(f) + \partial_x(g)$$

$$\partial_x(fg) = \partial_x(f)g + f\partial_x(g)$$

onde a multiplicação fg representa a função real que associa x ao valor $f(x) \cdot g(x)$.

Ocorre que o conjunto das funções reais que podem ser derivadas várias vezes, com as operações $f+g$ e fg acima definidas, é um anel comutativo denotado por $C_\infty(\mathrm{R})$. Assim a derivada com relação a x nada mais é do que uma função $\partial x : C_\infty(\mathrm{R}) \to C_\infty(\mathrm{R})$ que leva um elemento $f \in C_\infty(\mathrm{R})$ a sua derivada $\partial_x f$. Tais propriedades nos permitem generalizar o conceito de derivadas sobre um anel qualquer.

Seja A um anel, uma função $d : A \to A$ é dita uma derivação de A se $d(a + b) = d(a) + d(b)$ e $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ para todo $a,b \in A$.

Relembre que para qualquer anel A podemos construir seu anel de polinômios $A[x]$ cujos elementos são da forma $p(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ onde n é um inteiro positivo. Uma derivação $d : A[x] \to A[x]$ óbvia sobre $A[x]$ pode ser obtida pela mesma regra de derivação de polinômios reais, onde $d(p(x)) = a_1+2a_2x^2+\dots+na_nx^{n-1}$. Generalizações semelhantes podemos obter sobre os anéis de polinômios sobre várias indeterminadas $A[x1,..,xn]$.

A motivação que nos faz estudar os anéis com derivações é trazer este conceito pertencente a matemática aplicada para a matemática pura. Se um anel A possui uma derivação d, construímos um novo anel $A[\theta;d]$ denominado anel de operadores diferenciais. Os elementos de $R[\theta;d]$ são polinômios na variável θ com coeficientes em R. A adição é a usual de polinômios. Porém a multiplicação se estende de R via a regra $\theta a = a\theta+d(a)$.

Ou seja, a multiplicação sobre uma perturbação pela derivação, fazendo com que a comutatividade não ocorra neste novo anel.

Estes anéis de derivação aparecem naturalmente nas álgebras de Weyl. Estas álgebras são geradas de forma livre por duas variáveis x e y sobre um anel A junto com a relação $xy = yx + \epsilon$ onde ϵ é um elemento específico de A. As álgebras de Weyl aparecem no contexto da física quântica, e o termo ϵ corresponde ao princípio de incerteza de Heisenberg.

Vale lembrar ao autor que as nuances e aspectos formais das aplicações das álgebras de Weyl, e dos anéis de operadores diferenciais, à qualquer física fogem do escopo e do interesse atual dos autores. O que não indica que tal assunto não será tratado por algum de nós, até que possamos descrevê-lo melhor no capítulo de 20 anos do curso.

Maiores detalhes a respeito da relação das derivações com a construção dos anéis de operadores diferenciais e suas propriedades podem ser consultadas em Lamb e Vinciguerra (2021a).

8.5 INTRODUÇÃO AOS MÓDULOS

A frase “tudo é número”, atribuída a Pitágoras de Samos, 500 a.C., procurou sintetizar a relação em que, as mais diversas expressões da arte humana podem ser entendida de uma forma quantitativa. Um exemplo disso é a música, anteriormente citada.

Embora, para a época, a geometria não possuía elementos propriamente expressos em números. Exemplos disso eram as posições e convexidade. Isso parecia tornar a coerência da frase de Pitágoras vacilante. Porém, no século XVI, isso deixa de ser um problema graças ao produto cartesiano.

O plano cartesiano nos diz que qualquer ponto em uma folha retangular é perfeitamente determinado por suas distâncias à margem esquerda e à margem inferior. Nessa perspectiva, cada ponto P pode ser entendido como um par de números (x,y). A implicação disso é que qualquer forma geométrica se torna um conjunto desses pontos. Ou seja, formas geométricas são aglomerados de números o que recupera o sentido original da frase “tudo é número”.

Usando o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como modelo para representar distâncias, o plano euclidiano pode ser representado pelo produto cartesiano $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, isto é, o conjunto dos pares ordenados (x,y) onde x

e y são números reais. O espaço de três dimensões é R^3 e, caso precisemos de dimensões adicionais, podemos trabalhar com o conjunto das n-uplas $(x_1,x_2,...,x_n)$ de R^n. Os elementos de R^n também são denominados vetores, e R^n de espaço vetorial.

Formalmente falando, se k é um corpo, então um espaço vetorial sobre k é um grupo abeliano $(M,+)$ onde podemos multiplicar elementos $\alpha \in K$ com elementos $m \in M$ da forma $\alpha m \in M$ tal que, para todo $\alpha, \beta \in k$, $m, n, p \in M$:

1. $(\alpha + \beta)m = \alpha m + \beta m$
2. $\alpha(m + n) = \alpha m + \alpha n$
3. $\alpha(\beta m) = (\alpha\beta)m$
4. $1m = m$

É importante ressaltar aqui nessas condições que nem sempre os símbolos + ou ▪ significam a mesma coisa. Por exemplo, na identidade $(\alpha + \beta)$ $m = \alpha m + \beta m$ a soma à esquerda é realizada em k, enquanto que à direita estamos somando elementos de M. O cuidado então deve ser observando que tipo de elementos estamos operando. Isso é um abuso de notação que pode causar certo desconforto de início, mas que torna-se compreensível a medida que os estudos avançam.

Em R^2 a adição coordenada a coordenada $(x,y) + (r,s) = (x + r,y + s)$ faz de R^2 um grupo abeliano, e a multiplicação $\alpha(x,y) = (\alpha x,\alpha y)$, com $\alpha,x,y \in R$ satisfaz as condições acima citadas. Tais operações possuem grandes significados físicos, tai como posição, aceleração, força, etc, mas que não entraremos em detalhes aqui.

Na gana matemática de generalizar teorias, a substituição do corpo k por simplesmente um anel A, se traduz na definição de M como um módulo à esquerda sobre A. O termo “à esquerda” se refere ao lado em que o elemento α de A fica com relação ao emento m de M na multiplicação αm. Se A é um anel comutativo, não há diferença ao escrever αm ou $m\alpha$, mas se não for comutativo, isso acarretará erros.

O conceito de módulos não apenas generaliza a definição de espaço vetorial, mas há vários outros elementos que, do ponto certo de vista, são módulos. Se $(G,*)$ é um grupo, então para cada elemento $g \in G$ e $n \in Z$, a multiplicação $ng = g * g * ... *g$, g aparecendo n-vezes se $n \geq 0$, ou $ng = g^{-1} * g^{-1} * ... * g^{-1}$ se $n < 0$, faz de G um módulo sobre Z. Além destes conceitos, a definição de módulos também generaliza o conceito de ideal de um anel ou a representação de uma álgebra, termos estes que infelizmente não trataremos aqui.

8.6 OUTROS ANÉIS E SUAS TEORIAS

Tal como grupos, para quem se interessa na teoria de anéis pela teoria, há várias direções a se seguir. Pode-se trabalhar com ideais, radicais e anéis quocientes. Pode-se trabalhar com geometria algébrica, anéis de polinômios e anéis de frações. Pode-se trabalhar, também, com categorias específicas de anéis como anéis primos, semiprimos, semissimples, valorizações discretas, anéis locais e semilocais, perfeitos e semiperfeitos.

O conceito dos anéis de polinômios podem ser generalizados para outras estruturas. Os anéis das séries de Laurent possuem “polinômios de graus infinitos”. Os anéis de grupos transformam os elementos de um grupo G em indeterminadas. Os anéis de semigrupos faz algo parecido com uma estrutura menos exigente que a de grupos. Os anéis livres tornam as coisas ainda mais interessantes.

Há também muito sobre a teoria de anéis que pode ser dita sobre seus módulos e as funções entre módulos. A esta parte da teoria damos nome especial de homologia, pois estudas as propriedades dos anéis a partir dos homomorfismos entre seus módulos. O nome homomorfismo pode parecer assustador, mas não é difícil de entender seu conceito. Um homomorfismo nada mais é que uma função entre módulos que satisfaz algumas propriedades especiais. Por exemplo, se nosso anel é um corpo, um homomorfismo nada mais é do que uma transformação linear, aquelas que quando os espaços vetoriais tem dimensões finitas são representadas por matrizes.

9 ÁLGEBRA

9.1 INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS

Não mais justo do que dar o mesmo nome da área de conhecimento à estrutura matemática que reúne todos os conceitos deste campo de conhecimento numa só definição. Isto é, estamos falando da estrutura denominada álgebra. Antes de apresentar a definição do que vem a ser uma álgebra, precisamos fazer uma ressalva.

Quando começamos a falar de anel, dissemos que um anel é uma estrutura $(A,+,\cdot)$ onde $(A,+)$ é um grupo abeliano, a multiplicação $\cdot$ é distributiva sobre a soma $+$, para toda terna $a, b, c \in A$, $a(bc) = (ab)c$ e existe $1_A \in A$ tal que para todo $a \in A$ temos que $a1_A = 1_A a = a$. A identidade $a(bc) = (ab)c$ é denominada associatividade da multiplicação e 1_A a identidade do anel A. Dependendo do contexto em que estamos trabalhando, é conveniente ou não exigir a associatividade da multiplicação e/ou a existência da identidade. Como todos os nossos exemplos de anéis possuem esta propriedade, já as exigimos na definição.

Entretanto, no contexto de álgebras, a conveniência é outra. Assim, neste caso esporádico, devemos mencionar quando uma ou outra propriedade da definição é exigida ou não. Por exemplo, podemos dizer numa definição que $(A,+,\cdot)$ é um anel, não necessariamente associativo, se não exigimos a associatividade da multiplicação. Dito isso temos:

Definição 5.1 *Sejam um anel comutativo R e um módulo à esquerda $(A,+)$ sobre R. Dizemos que A é um álgebra sobre R, ou ainda uma R-álgebra, se A possui uma multiplicação sobre seus elementos $\cdot$ tal que $(A,+,\cdot)$ é um anel, não necessariamente associativo, e não necessariamente com identidade, tal que para todo $r \in R$ e $a,b \in A$, valem as identidades.*

$r(ab) = (ra)b = a(rb)$	(1)

Para ter uma dimensão da tamanha grandiosidade dessa estrutura para a álgebra (a área do conhecimento), observamos primeiramente o ponto de que estamos elevando um módulo A sobre um anel R ao *status* dele próprio como anel. Temos aqui, portanto, um emaranhado de operações: uma adição sobre R, outra sobre A, uma multiplicação sobre R, outra sobre A, uma ação de R em A e um outro tanto de axiomas. Ou seja, não é de se estranhar que tal tema somente apareça nas aulas mais adiantadas da disciplina de álgebra.

Um outro ponto a se considerar, já dito no primeiro parágrafo desta seção, é o quão primorosamente este conceito reúne os mais diversos temas da área dando-lhes novas perspectivas. Listamos abaixo alguns exemplos já apresentados:

- Um subanel, associativo, comutativo e com identidade, R de uma anel qualquer S faz de S uma R-álgebra;
- Um extensão K de um corpo k é uma k-álgebra (caso particular do exemplo acima);
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam uma "cadeia" de álgebras, cada um sobre o anel anterior;
- O anel de frações de um anel comutativo R é uma R-álgebra;
- O anel de matrizes $\mathrm{M}n(R)$ sobre um anel R é uma R-álgebra;

- Se R é um anel, associativo com identidade, e $Z(R) = \{r \in R : \forall a \in R, ra = ar\}$, então R é uma $Z(R)$-álgebra. Ou seja, todo anel é uma álgebra;
- O plano R^3 com o produto vetorial é uma R-álgebra.

Tantos exemplos nos diz que já conhecíamos álgebras e não sabíamos. E dado que já estamos familiarizado com o assunto, por que não nos apresentarmos a álgebras menos conhecidas como as álgebras de Lie, Hopf e Weyl.

9.2 ÁLGEBRA DE LIE

Quem já cursou uma vez na vida alguma aula de equações diferenciais não pode deixar de notar a grande semelhança de tal com os métodos de resolução de equações polinomiais. Por exemplo, uma equação diferencial ordinária de grau 2 é resolvida a partir das raízes de seu polinômio característico de grau 2, o qual é uma equação polinomial.

Por volta de 1870, Sophus Lie e Felix Klein resolveram aprofundar mais ainda esta relação de semelhança. Observando como Galois e Abel trabalhavam sobre os grupos de permutações das raízes polinomiais, Lie e Klein resolveram fazer algumas coisas parecidas sobre equações diferenciais, o que deu origem as famosas álgebras de Lie.

Uma álgebra de Lie é uma k-álgebra L sobre um corpo k, isto é, exigimos que k seja um anel de divisão comutativo. A multiplicação dentro de uma álgebra de Lie é denotada por $[x,y]$ ao invés de xy, o qual é chamado de comutador de Lie, ou também colchetes de Lie. O que distingue a álgebra de Lie de outras álgebras e anéis são as regras impostas a esta multiplicação.

Primeiramente, para todo $x,y \in L$ é exigido que $[x,y] = -[y,x]$, propriedade essa denominada antissimétrica. Cada elemento $x \in L$ define uma função pela multiplicação $d_x : L \to L$ dada por $d_x(y) = [x,y]$. Nas álgebras de Lie exigimos que cada uma dessas funções seja uma derivação sobre L, isto é, quaisquer que seja $y,z \in L$ queremos que:

$$d_x(y + z) = d_x(y) + d_x(z)$$
$$d_x([yz]) = [d_x(y),z] + [y,d_x(z)]$$

A primeira dessas identidades nada mais é do que a distributividade da multiplicação. Já a segunda se traduz por $[x,[y,z]] = [[x,y],z]+[y,[x,z]]$. Dado que $[[x,y],z] = -[z,[x,y]] = [z,[y,x]]$ e $[y,[x,z]] = -[y,[z,x]]$, a segunda identidade pode ser reescrita como:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

Essa igualdade é denominada identidade de Jacobi.

Não é difícil encontrar exemplos de álgebras de Lie. Se $(A,+,\cdot)$ é uma álgebra cuja multiplicação é associativa, então definamos uma nova multiplicação em A, por $[x,y] = xy - yx$. Com essa nova multiplicação a estrutura $(A,+,[\bullet,\bullet])$ é uma álgebra de Lie.

O colchete, ou comutador de Lie, em geral, não é associativo. Note que $[[x,x],y] = 0$, mas no entanto $[x,[x,y]]$ pode não se anular. De fato, tome a álgebra de matrizes M2(R) com o colchete definido por $[X,Y] = XY - YX$, onde XY é a multiplicação usual de matrizes. Se tomarmos por exemplo:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então $[X,X] = XX - XX = 0$. Logo $[[X,X],Y] = 0$, mas:

$$[X, [X,Y]] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Os exemplos mais comuns de álgebras de Lie são os conjuntos das matrizes quadradas de ordem n, com a multiplicação usual de matrizes; são exemplos de álgebras associativa e, definindo o colchete como acima, temos uma álgebra de Lie, dois trabalhos que estudam um pouco de álgebras de Lie são: Brum (2017), que trabalha com algumas propriedades das álgebras de Lie e o artigo de Livi *et al*. (2018), que estudam as subálgebras de Cartan das matrizes de ordem 3 sobre os números reais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É difícil comprimir 10 anos de trabalhos feitos por alguns professores e diversos alunos nestes pequenos espaços de poucas páginas. Muitos conceitos carecem de completude, outras de um aprofundamento maior para seu adequado entendimento, e por fim há aqueles conceitos nem mencionados. Estes aprofundamentos são apresentados com mais detalhes nas referências citadas. E isso com um toque especial dos estilos dos alunos.

Fato é que trabalhar com álgebra é muito mais do que manipular expressões numa matemática fria e calculista. Há muito sentimento em jogo. Há um pouco de ansiedade e frustração olha pela primeira vez um artigo cheios de símbolos estranhos, e numa língua estranha. Mas ai você aceita o desafio. Sabe que não está sozinho, pois há um orientador ao seu lado e amigos que compartilham da mesma situação. E no fim a a realização de conseguir algo que ninguém tirará de você.

Como professor é interessante ver o crescimento de nossoa alunos. Ver alguém estudando as primeiras definições e resultados com cara de espanto. Pouco a pouco se adaptando a eles. Em pouco tempo, aquele tema se tornando assunto de corredor dos estudantes.

É sempre uma oportunidade lecionar alguma disciplina ou orientar algum trabalho no tema da álgebra. Fazer o que gostamos. Influenciar esse gosto nos alunos. E aprender mais ainda a gostar mais com eles vendo suas persistências. Algumas vezes até frente a questões financeiras, como uma bolsa atrasada ou uma distância maior da universidade.

É claro que depois de um tempo os alunos deverão seguir outros caminhos. E é gratificante ver que alguns deles seguem na área acadêmica. Esses vão para programas e grupos de pesquisa que já conhecem seus trabalhos de um ou outro evento. Porém, tão gratificante quando é ver nossos alunos seguirem na área de ensino. Levando toda essa bagagem de conhecimento à educação básica. E quem sabe, formando as próximas gerações e algebristas do curso.

Seja na área de docência e pesquisa acadêmica, seja na área de ensino--aprendizagem e educação básica, o certo é que nenhum aluno passou, pelos estudos em álgebra do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do *campus* Toledo, sem fazer história.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. AND MERZBACH, U. C. **História da matemática.** [*S.l.*]: Blucher, 2012.

BRUM, E. S. B. **Classificação das subálgebras de Lie de gl (2, R).** [*S.l.*: *s.n.*], 2017.

BUZINARO, F. V. **De Pitágoras a Allen Forte:** algumas relações entre matemática e música. [*S.l.*]: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. [*S.l.*]: 2019.

CORDEIRO, A. P.; VIEIRA, L. H. **Teoria de Módulos.** [*S.l.*]: 2017.

CORDEIRO, A. P.; VIEIRA, L. H.; ARAÚJO, W. F. **Breve análise sobre as relações entre R-módulos e R-R bimódulos.** [*S.l.*]: 2018.

GRASSI, L. D.; VINCIGUERRA, R. W. **Anéis semi-simples e representações de**

grupo. TCC (Monografia em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

LAMB, M. E.; VINCIGUERRA, R. W. **Simplicidade e primitividade dos anéis de operadores diferenciais**. TCC (Monografia em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021a.

LAMB, M. E.; VINCIGUERRA, R. W. Um estudo sobre os Anéis de Frações e seus Ideais. *In*: SEMANA DA MATEMÁTICA DA UTFPR. 2021b,Toledo. **Anais [...]**.

LIVI, A.; DUARTE, A. A.; A. W. F. **Investigação e Verificação de Subálgebras de Cartan em gl(3.R)**. *In*: NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; AMARAL, Marco Aurélio Tavares (Orgs.) ENDICT, 6., *Campus* Toledo, PR.: UTFPR, 27 a 29 ago. 2018. **Anais [...].** Disponível em: http://maverick.td.utfpr.edu.br/endict/.

MERLI, R.; ARAÚJO, W. F. **Uma Aplicação da Teoria de Grupos na "Solução" de Expressões Numéricas sem Signos de Agregação.**

PREVIATTI, A. C. **Subgrupos de Sylow, subgrupos de Hall e alguns resultados.** [*S.l.*]: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.

REMOR, A. V. **O Mistério Por Trás das Resoluções de Equações Polinomiais.** 2021.

REMOR, A. V.; Araujo, W. F. **Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas.** [*S.l.*]: Atena, 2020.

REMOR, A. V., SANTANA, A. G. Um Estudo Sobre o Método de Criptografia RSA Associado ao K[x]. *In*: OLIVEIRA, Alberto Vinicius de ; PAETZOLD, Gustavo Henrique; SCHAKER, Patricia Dayane Carvalho (orsg.), ENDICT, 7., *Campus* Toledo, PR.: UTFPR, 28 ago. 2019. **Anais [...].** Disponível em: http: //maverick.td.utfpr.edu.br/endict/.

CAPÍTULO 12

SOLUBILIDADE E CÁLCULO DO GRUPO DE GALOIS DE POLINÔMIOS

Adina Veronica Remor: adinaremor@hotmail.com
Wilian Francisco de Araujo: waraujo@utfpr.edu.br

Na matemática, qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente pode ser tratado direta ou indiretamente, por meio de equações. Como interpretar equações? Equações estão relacionadas a maneira como equivalências entre associações de entes estão representadas. Assim, trata-se de uma igualdade estabelecida por meio uma relação entre fatos, conceitos e ideias. Elas podem ser encontradas nas mais variadas áreas, e o pensamento resolutivo constitui a base da matemática.

Assim, as equações, sejam elas algébricas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas etc. são o alicerce da matemática, e a busca por suas resoluções sempre motivaram os matemáticos de todos os tempos. Neste trabalho estaremos interessados em um tipo especial de equação citado anteriormente: as equações algébricas com uma incógnita. Elas são aquelas cujos coeficientes pertencem a um corpo K e as únicas operações realizadas são soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. A forma geral de uma equação algébrica é:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

Em que $n \in \mathbb{Z}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$. O maior índice n tal que $a_n \neq 0$ é denominado o grau da referida equação. De acordo com (GARBI, 2010), ao longo dos

$\neq$

milênios várias descobertas envolvendo o grau dessas equações e a busca por suas resoluções foram alcançadas, porém o auge dos avanços nesse tema foi alcançado graças a um jovem chamado Evariste Galois. As pesquisas desenvolvidas por esse matemático mudaram todo o rumo da Álgebra, permitindo o surgimento de novas teorias: a teoria de grupos, que possuí aplicações nos mais variados campos e a teoria de Galois, responsável por dar uma resposta satisfatória a um problema matemático que ficou em aberto por inúmeros séculos, a solubilidade de equações de grau maior ou igual a 5. De acordo com Freire (2009),

> Os trabalhos do matemático francês Evariste Galois exerceram enorme influência na Matemática do século XX, sendo uma das fontes do surgimento do conceito de Estrutura Matemática, que é central para essa disciplina atualmente. Essas observações apontam reflexos da originalidade, fertilidade e generalidade das ideias de Galois. Na verdade, é possível afirmar que a Teoria de Galois marca a transição histórica da Álgebra como estudo de polinômios para a chamada Álgebra Moderna, ou seja, o estudo de estruturas algébricas (FREIRE, 2009, p. 127).

Nesse capítulo, vamos apresentar a relação entre os grupos solúveis e as equações polinomiais solúveis por radicais, justificando o porquê de não ser possível encontrar uma fórmula que forneça as raízes de um polinômio de grau 5 utilizando apenas radicais.

1 GRUPOS SOLÚVEIS

Nesta seção vamos apresentar algumas definições e resultados pertinentes a teoria de grupos, em especial, grupos simples e solúveis. Tais tópicos são necessários para a compreensão da insolubilidade de algumas equações quínticas.

Definição 1. *Um grupo G é dito solúvel se este tem uma sequência finita de subgrupos.*

$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$ tais que:

1. G_i é subgrupo normal de G_{i+1}, o que se denota por, $G_i \lhd G_{i+1}$, $\forall\, i = 0,\dots, n-1$;

2. $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é *abeliano*[1], $\forall\, i = 0,\dots, n-1$.

1 Observe que o grupo $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ está bem definido, visto que G_i é subgrupo normal de G_{i+1}.

Observe que não vale a transitividade: $G_i \lhd G_{i+1} \lhd G_{i+2}$ não implica que $G_i \lhd G_{i+2}$.

Exemplo 2. *Todo grupo abeliano G é solúvel, basta considerar a sequência $\{e\} \lhd G$. Com efeito, $\{e\}$ é subgrupo normal de G e $\frac{G_{i+1}}{\{e\}} \simeq G$ é abeliano.*

Exemplo 3. *O grupo simétrico S_3 de ordem 6 é solúvel, pois possui um subgrupo cíclico A_3 de ordem 3, gerado pela permutação (123), cujo quociente $\frac{S_3}{A_3}$ é cíclico de ordem 2*[2].

Basta ver no exemplo acima que a sequência $\{e\} \subseteq A_3 \subseteq S_3$ satisfaz as condições 1 e 2. Outros exemplos de grupos solúveis são:

- $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$, com a sequência $\{e\} \subseteq A \subseteq S \subseteq D_4$, em que $A = \langle \sigma^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $S = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$.

Neste caso temos $\{e\} \lhd A$, $A \lhd S$ e $S \lhd D_4$, além disso $\frac{A}{\{e\}} \simeq A$ é cíclico, $\frac{S}{A} \simeq \mathbb{Z}_2$ é cíclico e $\frac{D_4}{S} \simeq \mathbb{Z}_2$ é cíclico, portanto os quocientes são abelianos e consequentemente D_4 é solúvel.

- S_4, com a sequência $\{e\} \subseteq V \subseteq A_4 \subseteq S_4$, em que V é o grupo de Klein.

Temos $\{e\} \lhd V$, $V \lhd A_4$ e $A_4 \lhd S_4$. Além disso, $\frac{V}{\{e\}} \simeq V$ é *abeliano*, $\frac{A_4}{V} \simeq \mathbb{Z}_3$ e $\frac{S_4}{A_4} \simeq \mathbb{Z}_2$ são cíclicos. Portanto os quocientes são *abelianos*, e assim S_4 é solúvel.

Teorema 4. *[21, Theorem 14.4] Seja G um grupo, H um subgrupo de G e N um subgrupo normal de G.*

1. Se G é solúvel, então H é solúvel.
2. Se G é solúvel, então $\frac{G}{N}$ é solúvel.
3. Se N e $\frac{G}{N}$ são solúveis, então G é solúvel.

Definição 5. *Um grupo G é simples se seus únicos subgrupos normais são $\{e\}$ e G.*

Exemplo 6. *Todo grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ com p primo é simples, já que não possui outros subgrupos normais além dos triviais. Estes grupos também são abelianos, portanto, solúveis. Em especial, eles são os únicos grupos simples solúveis.*

2 Em especial, todo grupo cíclico é abeliano.

O próximo resultado generaliza este exemplo:

Teorema 7. *Um grupo solúvel é simples se e somente se é cíclico de ordem prima.*

Demonstração. Suponha que G é um grupo solúvel simples, assim existe uma sequência $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$, no qual assumimos $G_i \neq G_{i+1}$. Dessa forma, G_{n-1} é subgrupo normal de G. Mas como G é simples, G só possui subgrupos normais triviais, logo $G_{n-1} = \{e\}$ e assim $\frac{G_n}{G_{n+1}} = \frac{G}{\{e\}} = G$ *é abeliano*. Como G é *abeliano*, todo subgrupo de G é normal, mas G é simples, logo G não possui subgrupos normais próprios. Assim, dado um elemento $g \in G$e $g \neq e$, teremos $\langle g \rangle = G$, então G deve ser cíclico com ordem prima. Por outro lado, se G é cíclico com ordem prima, G é *abeliano* e não possui subgrupos não triviais, logo G é solúvel e simples.

Teorema 8. *[21, Theorem 14.7] Se $n \geq 5$, o grupo alternado A_n de grau n é simples.*

Na verdade, A_5 é o menor grupo simples não abeliano, resultado que foi provado primeiramente por Galois.

Corolário 9. *O grupo simétrico S_n de grau n não é solúvel para $n \geq 5$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que S_n é solúvel para $n \geq 5$. Assim, pelo Item i) do Teorema 4 temos que A_n é solúvel. Se $n \geq 5$, vimos no Teorema 8 que A_n é simples. Logo, se $n \geq 5$, A_n é um subgrupo simples e solúvel. Pelo Teorema 7, segue que A_5 é cíclico de ordem prima. Mas sabemos que se $n \geq 5$, a ordem de A_5 é $\frac{n!}{2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot [n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]$, que é par e maior que 2. Absurdo.

2 EXTENSÕES RADICAIS

Nesta seção, apresentaremos formalmente a definição de extensão radical. Por exemplo, considere $\xi = \sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[5]{\frac{7+\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{4}}$. Para encontrarmos uma extensão de $\mathbb{Q}$ que contém ξ, precisaremos adjuntar os elementos: $\alpha = \sqrt[3]{11}$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt[5]{\frac{7+\beta}{2}}$, $\delta = \sqrt[3]{4}$, $\varepsilon = \sqrt[4]{1+\delta}$

De maneira formal, temos a seguinte definição:

Definição 10. *Uma extensão $L : K$ em $\mathbb{C}$ é radical se $L = K[\alpha_1,..., \alpha_n]$ onde para cada $j = 1,..., n$ existe um inteiro n_j tal que $\alpha_j^{n_j} \in K[\alpha_1,..., \alpha_{j-1}], j \geq 2$. Dizemos que os elementos α_j formam uma sequência radical para $L : K$. O grau radical do radical α_j* é n_j.

Exemplo 11. *A expressão anterior* $\xi = \sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[5]{\frac{7+\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{4}}$ *está contida em uma extensão radical da forma em que* $\alpha^3 = 11$, $\beta^2 = 3$, $\gamma^5 = \frac{7+\beta}{2}$, $\delta^3 = 4$ e $\varepsilon^4 = 1+\delta$.

Perceba que qualquer expressão radical está contida em uma extensão radical.

Observação 12. *Toda extensão radical é finita.*

Observação 13. N*em toda extensão radical é normal. Por exemplo,* $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ é uma extensão radical, porém $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ não é normal, visto que não possui todas as raízes do polinômio $f(x) = x^3-2$ (apenas $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$). Se consideramos K como o corpo de decomposição para $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, contido em $\mathbb{C}$, teremos $K = [\alpha, \alpha u, \alpha u^2]$, em que u é a raiz cúbica da unidade.

Observação 14. Podemos tomar os graus n_j´*s* como primos, mesmo que seja necessário aumentar a sequência de subcorpos. Por exemplo considere $\alpha = \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}}$. Sejam $\beta = \sqrt{5}$ e $\gamma = \sqrt[3]{\beta}$. Temos $\alpha^6 \in \mathbb{Q}$, $\beta^2 \in \mathbb{Q}$, e $\gamma \in \mathbb{Q}[\beta]$, que são extensões radicais.

Um polinômio é considerado solúvel por radicais se todas as suas raízes são expressões radicais sobre o corpo base. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 15. Seja $f(x)$ um polinômio sobre um corpo K de $\mathbb{C}$ e seja $Gal(f,K)$ o corpo de decomposição de $f(x)$ sobre K. Dizemos que $f(x)$ é solúvel por radicais se existe um corpo M contendo $Gal(f,K)$ tal que $M : K$ seja uma extensão radical.

Observe que $f(x)$ é solúvel por radicais somente se existe tal corpo M. Além disso, a extensão $Gal(f,K) : K$ não precisa ser radical. De fato, queremos que tudo no corpo de decomposição $Gal(f,K)$ seja expresso por radicais, mas não adianta esperar que tudo expresso pelos mesmos radicais esteja no corpo de decomposição.

De fato, considere o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. Pelo critério de irredutibilidade para polinômios sobre $\mathbb{Z}_p[x]$, vamos verificar que o polinômio $\bar{f}(x) = x^3 + x^2 + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_2[x]$. De fato, como $\bar{f}$ não possui raízes em $\mathbb{Z}_2$, concluímos que $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ e consequentemente sobre $\mathbb{Q}$. Agora, vamos mostrar que $Gal\ f(f,\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}$ não é radical.

As raízes de $f(x)$ são $\alpha_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}, \alpha_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}$ e $\alpha_3 = 2\cos\frac{8\pi}{7}$. Observe que as raízes de $f(x)$ são reais, logo $Gal(f,\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$. Além disso, $\alpha_2 = \alpha_1^2 - 2$ e $\alpha_3 = -\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1$, assim as raízes α2 e α3 podem ser obtidas por meio de α1, ou seja, $Gal(f,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\alpha_1]$.

Agora, suponha que $\mathbb{Q}[\alpha_1] : \mathbb{Q}$ é uma extensão radical. Então existe n $\in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_1^n \in \mathbb{Q}$. Ou seja, α_1 é raiz do polinômio $x^n - \alpha_1^n \in \mathbb{Q}[x]$. Como f(x) é mônico e irredutível, f(x) é o polinômio minimal associado a α_1, logo f(x) divide $x^n - \alpha_1^n$. As raízes n-ésimas de α_1^n são $\alpha_1 \cdot \zeta_n^k$ para $k = 1,\ldots,n$, em que $\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \sin\frac{2\pi}{n}$. Ou seja, as raízes do polinômio $x^n - \alpha_1^n$ são da forma $\alpha_1 \cdot \zeta_n^k$ para $k = 1,\ldots,n$. Mas como f(x) divide $x^n - \alpha_1^n$, as demais raízes de f(x) são da forma $\alpha_1 \cdot \zeta_n^k \in \mathbb{C}$ (observe que só teríamos $\alpha_1 \cdot \zeta_n^k \in \mathbb{R}$ se $\sin\frac{2\pi}{n} = 0$, o que implicaria $n = 1$ ou $n = 2$, mas $\partial f = 3$, logo $n \geq 3$). Porém vimos que as raízes de $f(x)$ são números reais. Absurdo. Portanto $Gal(f,\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}$ não é uma extensão radical.

Com o auxílio do software Wolfram Alpha, encontramos que as raízes de f(x) expressas por radicais são da forma:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{7^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1+3i\sqrt{3}}{2}}} + \sqrt[3]{\frac{7\left(1+3i\sqrt{3}\right)}{2}}\right)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{7^{\frac{2}{3}}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{3\sqrt[3]{4\left(1+3i\sqrt{3}\right)}} - \frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{7\left(1+3i\sqrt{3}\right)}{2}}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3} - \frac{7^{\frac{2}{3}}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{3\sqrt[3]{4\left(1+3i\sqrt{3}\right)}} - \frac{1}{6}\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{7\left(1+3i\sqrt{3}\right)}{2}}$$

Considere $M=\mathbb{Q}\left[\alpha,\beta,\gamma,\delta\right]$, em que $\alpha 2=-3$, $\beta 3=2$, $\gamma 3=1+3\alpha$ e $\delta 3=7$. Observe que M é uma extensão radical que contém $Gal\left(f,\mathbb{Q}\right)$. Assim f(x) é solúvel por radicais, embora seu corpo de decomposição não seja uma extensão radical.

Além disso, queremos que todos as raízes de f(x) sejam expressas por radicais. É possível que algumas raízes sejam expressas por radicais enquanto outras não (basta tomar o produto de dois polinômios, um solúvel e o outro não). Entretanto se um polinômio irredutível f(x) tem uma raiz expressa por radicais, então todas as suas raízes devem ser expressas, basta lembrar que K[α] ≃ K[β], onde α e β são as raízes de f(x).

Lema 16. Se $L : K$ é uma extensão radical em C e M é o fecho normal de $L : K$, então $M : K$ é radical.

Demonstração. Seja $L=K[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ uma extensão radical com $\alpha_i^{n_i}\in K\left[\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}\right]$. . Seja $f_i\left(x\right)$ o polinômio minimal de α_i sobre K. Então M ⊇ L é o corpo de decomposição de $f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=\prod_{i=1}^{n} f_i(x)$. Se β_{ij} é outra raiz de fi(x), temos β_{ij} ∈ M. Além disso, como α_i e β_{ij} são raízes de um mesmo polinômio irredutível sobre K, então K[α_i] e K[β_{ij}] são corpos isomorfos, assim existe um isomorfismo σ : K[α_i] → K[β_{ij}] que pode ser estendido a um K-automorfismo τ : M → M. Como α_i é radical sobre K, β_{ij} também é, portanto concluímos que M : K é radical.

Lema 17. Seja K um subcorpo de $\mathbb{C}$ em que $xn-1$ se divide. Sejam $a \in K$ e L o corpo de decomposição de $xn-a \in K[x]$. Então o grupo de Galois de $L : K$ é abeliano.

Demonstração. Seja α uma raiz qualquer de $x^n - a$. Como $x^n - 1$ se decompõe em K, a raiz geral de $x^n - a$ é αu, onde u é uma raiz de $x^n - 1$ em K. Como u ∈ K, temos L = K[α], assim qualquer K-automorfismo de L é determinado por seu efeito em α. Dados dois K-automorfismos σ : α → αu e τ : α → αξ, onde u,ξ são raízes n-ésimas da unidade, temos (σ ∘ τ)(α) = σ(τ(α)) = σ(αξ) = σ(α)· ξ = (αu) ξ = τ(αu) = τ(σ(α)) = (τ ∘ σ)(α). Portanto o grupo de Galois de L : K é abeliano.

Este resultado é bem interessante, mas devemos tomar cuidado com o corpo base, que deve conter uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Além disso, este resultado é importante para os demais resultados que virão a seguir.

Lema 18. Se K é um subcorpo de $\mathbb{C}$ e L : K é normal e radical, então Γ(L : K) é solúvel.

Proof. Suponha que $L = K[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ com $\alpha_i^{n_i} \in K[\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}]$ .. Como vimos na Observação 14, como L : K é radical, podemos refinar K[α1,...,αn] a fim de tomar todos os índices n'is primos. Portanto vamos assumir que todos os índices ni, i = 1,...,n são primos. Em particular, existe um primo p tal que $\alpha_1^p \in K$. Além disso, a demonstração será feita por indução sobre n.

- Se n = 0, então L = K , assim Γ(L : K) = {Id} é solúvel.
- Se $\alpha_1 \in K$, então $L = K[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$ e Γ(L : K) é solúvel por indução. Podemos assumir então que $\alpha_1 \notin K$. Seja f(x) o polinômio minimal de α_1 sobre K. Como $\alpha_1^p \in K$, α_1 é raiz do polinômio $x^p - \alpha_1^p$. Assim f(x) divide $x^p - \alpha_1^p$.

Como $\alpha_1 \notin K$, f(x) tem no mínimo grau 2. Seja β ∈ L uma outra raiz de f(x) diferente de α_1. Consequentemente β também é raiz de $x^p - \alpha_1^p$, assim $\beta_1^p = \alpha_1^p$. Considere $\epsilon = \frac{\alpha_1}{\beta}$. Então $\epsilon^p = 1$ e $\epsilon \neq 1$ é raiz do polinômio $x^p - 1$. Assim, M = K[ϵ] é o corpo de decomposição do polinômio $x^p - 1$, logo M : K é normal e Γ(M : K) é abeliano. Agora, considere a cadeia de subcorpos $K \subseteq M \subseteq M[\alpha_1] \subseteq L$. Observe que L : K é finita e normal, logo L : M também é, e assim o teorema fundamental de Galois se aplica à L : K e à L : M.

Como $x^p - 1$ se decompõe linearmente em M e $\alpha_1^p \in M$, o Lema 17 nos dá que $\Gamma(M[\alpha_1] : M)$ é abeliano. Aplicamos o teorema fundamental de Galois para deduzir que $\Gamma(M[\alpha_1]:M) \simeq \frac{\Gamma(L:M)}{\Gamma(L:M[\alpha_1])} \cong$

Agora, L = M[α1][α2,...,αn], e assim L : M[α1] é uma extensão normal e radical. Por indução, Γ(L : M[α1]) é solúvel. Portanto, pelo Teorema 4, Γ(L : M) é solúvel. Já observamos que M : K é normal e que Γ(M : K) é abeliano. Assim, pelo Teorema Fundamental de Galois $\Gamma(M:K) \simeq \frac{\Gamma(L:K)}{\Gamma(L:M)}$. Por fim, como Γ(L : M) é solúvel, segue pelo Teorema 4 que Γ(L : K) é solúvel, como queríamos.

Teorema 19. Se K é subcorpo de $\mathbb{C}$ e $K \subseteq L \subseteq M$ onde M : K é uma extensão radical, então o grupo de Galois de L : K é solúvel.

Demonstração. Seja K0 o corpo fixo de $\Gamma(L : K)$ e $N : M$ o fecho normal de M : K0. Assim $K \subseteq K_0 \subseteq L \subseteq M \subseteq N$. Como $M : K_0$ é radical, temos pelo Lema 16 que $N : K_0$ é uma extensão normal radical. Assim, pelo Lema 18 segue que $\Gamma(N : K_0)$ é solúvel. Como K_0 é o corpo fixo de $\Gamma(L : K)$ e $\Gamma(N : K_0)$ é solúvel, segue que $L : K_0$ é uma extensão normal. Então pela correspondência de Galois, temos: $\tilde{A}(L:K_0) \simeq \frac{\tilde{A}(N:K_0)}{\tilde{A}(N:L)}$

O Teorema 4 implica que $\Gamma(L : K_0)$ é solúvel. Mas $\Gamma(L : K) = \Gamma(L : K_0)$, assim concluímos que $\Gamma(L : K)$ é solúvel.

Teorema 20. [21, Theorem 18.20] Seja K um corpo de característica zero e seja L : K uma extensão normal finita com grupo de Galois solúvel. Então existe uma extensão R de L tal que R : K é radical.

O próximo resultado é o mais importante desta seção:

Teorema 21. Se $f(x)$ é um polinômio sobre um corpo $K \subseteq \mathbb{C}$, $f(x)$ é solúvel por radicais se e somente se o grupo de Galois de $f(x)$ é solúvel.

Demonstração. Seja Gal(f,K) o corpo de decomposição de $f(x)$ sobre $K \subseteq \mathbb{C}$ e suponha que $f(x)$ é solúvel por radicais. Como $f(x)$ é solúvel por radicais, existe uma extensão $M : K$ radical, com $\mathrm{Gal}(f,K) \subseteq M$. Assim, pelo Teorema 19 segue que o grupo de Galois de Gal(f,K) : K é solúvel, ou seja, o grupo de Galois associado a $f(x)$ sobre K é solúvel.

Por outro lado, se o grupo $\Gamma(\mathrm{Gal}(f,K) : K)$ é solúvel, pelo Teorema 20, como Gal(f,K) é uma extensão normal e finita, existe uma extensão R de Gal(f,K) tal que R : K é radical. Portanto $f(x)$ é solúvel por radicais.

Agora, temos condições de determinar quando um polinômio será solúvel por radicais. Para terminar essa seção, apresentaremos um último resultado:

Teorema 22. [21, Theorem 15.9] Sejam p um primo e $f(x)$ um polinômio irredutível de grau p sobre $\mathbb{Q}$. Suponha que $f(x)$ tenha precisamente duas raízes imaginárias em $\mathbb{C}$. Então o grupo de Galois de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ é isomorfo ao grupo simétrico S_p.

Exemplo 23. O polinômio $x^5 - 6x + 3$ sobre $\mathbb{Q}$ não é solúvel por radicais. De fato, o polinômio $f(x) = x^5 - 6x + 3$ possui três raízes reais e duas complexas, donde segue pelo Teorema 22 que o grupo de Galois de $f(x)$ é S_5, que não é solúvel.

Na próxima seção, apresentaremos alguns resultados que permitem determinar o grupo de Galois de qualquer polinômio com grau menor ou igual a 5, facilitando a compreensão da insolubilidade de algumas equações quínticas.

Classificando os Grupos de Galois

Nessa seção veremos como classificar o grupo de Galois de um polinômio irredutível de grau 2,3,4 ou 5. Damos prioridade aos resultados, portanto, as demonstrações serão ocultadas. Utilizamos principalmente os materiais [3], [4], [5], [6], [10] e [17].

Definição 24. Seja K um corpo e seja $f(x) \in K[x]$. Sejam $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ as raízes de f(x) em Gal(f,K), e seja $\Delta = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \in Gal(f,K)$. Definimos o discriminante de f(x) como o elemento $D = \Delta^2 = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Definição 25. Se L é uma extensão algébrica de K e $\alpha \in L$, então o discriminante de α é definido como o discriminante do polinômio minimal $m_\alpha(x)$.

A partir das definições acima, podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 26. Sejam $f(x) \in K[x]$ um polinômio irredutível e Gal(f,K) o corpo de decomposição de f(x) em K[x]. Então:

1. $\sigma \in \Gamma(Gal(f,K) : K)$ é uma permutação par se e somente se $\sigma(\Delta) = \Delta = \sqrt{\Delta^2}$;
2. $\sigma \in \Gamma(Gal(f,K) : K)$ é uma permutação ímpar se e somente se $\sigma(\Delta) = -\Delta$;

Além disso, $D = \Delta^2 \in K$. Assim, temos o seguinte resultado:

Corolário 27. Seja $f(x) \in K[x]$ um polinômio irredutível com n raízes, cujo discriminante é Δ^2. Então $\Gamma(Gal(f,K) : K)$ é um subgrupo de A_n se e somente se $\Delta \in K$.

3 POLINÔMIOS DE GRAU 2

Seja $f(x) = x^2 + bx + c$ um polinômio irredutível sobre um corpo K. Sabemos, pela fórmula resolutiva de equações do 2º grau, que as raízes desse polinômio podem ser expressas por $\alpha_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Assim, podemos calcular o discriminante:

$$D = \text{Ä}^2 = \prod_{i<j}\left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2 = \left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} - \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{b^2-4c}\right)^2 = b^2 - 4c$$

Observe que encontramos o famoso discriminante estudado durante o ensino fundamental (só não possui o coeficiente a pois f(x) é mônico). O corpo de decomposição de f(x) em K será $K=[\alpha_1,\alpha_2]=K\left[\frac{-b+\sqrt{\Delta^2}}{2},\frac{-b-\sqrt{\Delta^2}}{2}\right]$. Porém, como $b\in K$, segue que $\frac{-b}{2}\in K$ e assim $Gal(f,K)=K\left[\sqrt{\Delta^2},-\sqrt{\Delta^2}\right]=K[\sqrt{\Delta^2}]=K[\Delta]$.

Exemplo 28. Seja $f(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$. Temos $\Delta^2 = b^2-4c = 0^2-4\cdot 1 = -4$. Portanto $Gal(f,\mathbb{R})=\mathbb{R}[\Delta]=\mathbb{R}\left[\sqrt{-4}\right]=\mathbb{R}[2i]\cong\mathbb{C}$.

Proposição 29. Sejam $f(x) \in K[x]$ um polinômio de grau 2 e Δ^2 seu discriminante. Se G é o Grupo de Galois de Gal(f,K) : K, então $G \leq S_2$. Em especial,

1. Se $\sqrt{\Delta^2}=\Delta\in K$, então $G = \{Id\}$;
2. Se $\sqrt{\Delta^2}=\Delta\notin K$, então $G = S_2$.

Exemplo 30. Seja $f(x)=x^2-2x-3\in \mathbb{Q}[x]$. Observe que $\Delta=\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)}=\sqrt{16}=4\in\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$. Portanto $G = \{Id\}$. Perceba que neste caso as raízes de f(x) são $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 3$, que são números racionais, assim $Gal(f,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e por isso $G = \{Id\}$, já que o único $\mathbb{Q}$ –automorfismo de $\mathbb{Q}$ é a Id.

Exemplo 31. Seja $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$ $\mathbb{Q}[x]$. Temos $Gal(f,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\left[\sqrt{\Delta^2}\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt{8}\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Como $\Delta=\sqrt{8}\notin\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$, o grupo de Galois associado à extensão $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]:\mathbb{Q}$ é S2.

Observe que no Exemplo 30 temos o caso trivial. Dado $f(x) \in K[x]$ e L o corpo de decomposição de f(x) sobre K, o grupo de Galois é $\Gamma(L : K) = \{Id\}$ se e somente as raízes de f(x) estão em K. Portanto, a partir de agora não vamos mais nos interessar em calcular quando $\Gamma(L : K)$ é {Id}, ou seja, vamos analisar apenas os casos em que f(x) é irredutível sobre K.

Sabemos que o grupo de Galois de um polinômio $f(x) \in K[x]$ de grau n é um subgrupo de S_n. Ou seja, o grupo de Galois Γ(f,K) irá permutar as raízes da equação f(x) = 0. Se nós reordenarmos as raízes de f(x), o novo grupo de Galois Γ(f,K) irá mudar para um conjugado do grupo Γ(f,K), ou seja, existe $\rho \in \Gamma(f,K)$ tal que $\Gamma'(f,K) = \rho\Gamma(f,K)\rho^{-1}$. Assim, estaremos interessados apenas em calcular as classes de conjugação de Γ(f,K). Conforme o grau do polinômio f(x) aumenta, o número de classes de conjugação também irá aumentar consideravelmente. Mas no caso em que f(x) é irredutível sobre K, o grupo de Galois Γ(f,K) irá agir transitivamente sobre as raízes de f(x), o que reduz a lista de possíveis subgrupos rapidamente. A seguir apresentamos algumas definições e teoremas importantes para a compreensão deste parágrafo.

Definição 32. Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação de G em X é definida como um homomorfismo $\phi : G \to P(X)$, no qual $P(X)$ é o conjunto das permutações dos elementos de X.

Neste caso, dado $\alpha \in X$ e $g \in G$, representamos a ação de g em α por $g\alpha$.

Definição 33. Seja G agindo no conjunto X. Sejam $\alpha,\beta \in X$. Vamos definir a relação $\sim$ da seguinte forma: $\alpha \sim \beta$ se e somente se existe $g \in G$ tal que $\beta = g\alpha$. Essa relação é de equivalência, e assim as classes de conjugação são definidas como as órbitas de G sobre X.

Definição 34. Uma ação de um grupo G sobre um conjunto X é chamada transitiva se houver uma única órbita sobre a ação, isto é, para quaisquer $\alpha,\beta \in X$, existe $\rho \in G$ tal que $\rho\alpha = \beta$.

Teorema 35. Seja $f(x)$ um polinômio sobre o corpo K. Então o grupo de Galois G age transitivamente no conjunto de todas as raízes de $f(x)$ se e somente se $f(x)$ é irredutível sobre K.

Teorema 36. Sejam K um corpo e $f(x)$ um polinômio irredutível de grau n sobre K. Então o grupo de Galois G de $f(x)$ é um subgrupo transitivo de S_n cuja ordem é divisível por n.

Observe que os dois teoremas acima são muito importantes e auxiliam na determinação dos possíveis grupos de Galois. Assim, para que G seja grupo de Galois de um polinômio irredutível $f(x)$ de grau n, G deve ser um grupo transitivo cuja ordem é múltipla de n.

4 POLINÔMIOS DE GRAU 3

Já sabemos que um polinômio irredutível de grau 3 tem grupo de Galois isomorfo a um subgrupo de S_3. Além disso, pelo Teorema 36, a ordem do Grupo de Galois será divisível por 3, portanto as únicas possibilidades para o grupo de Galois de um polinômio irredutível de grau 3 são os subgrupos transitivos

A_3 (gerado pela permutação (123)) e S_3 (gerado pelas permutações (123) e (12)). Vamos verificar em quais casos cada um ocorre, mas antes precisaremos de alguns resultados auxiliares, que nos ajudarão no cálculo do discriminante.

Lema 37. Seja f(x) ∈ K[x] um polinômio irredutível da forma $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. O polinômio f(x) pode ser reescrito da forma y3 + py + q, substituindo $x=y-\frac{b}{3}$, com $p=\frac{-b^2}{3}+c$ e $q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d$.

Observação 38. O discriminante do polinômio $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ é igual ao discriminante do polinômio $y^3 + py + q$.

Proposição 39. Sejam $f(x) = x^3+bx^2+cx+d \in K[x]$ um polinômio irredutível e y^3+py+q sua forma reduzida. Então o discriminante de f(x) pode ser facilmente calculado por $D = \Delta^2 = -4p^3 - 27q^2$.

Veja que a substituição que fizemos nos fornece uma equação muito importante que facilita o cálculo do discriminante.

Exemplo 40. Considere $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in Q[x]$. Vamos encontrar sua forma reduzida. Temos b = 1,c = −2 e d = −1. Portanto $p=\frac{-b^2}{3}+c=\frac{-1}{3}-2=\frac{-7}{3}$ e $q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d=\frac{2}{27}+\frac{2}{3}-1=\frac{-7}{27}$. Assim f(x) pode ser reescrito como $y^3-\frac{7}{3}y-\frac{7}{27}$ e seu discriminante será $\Delta^2=-4\cdot\left(\frac{-7}{3}\right)^3-27\cdot\left(\frac{-7}{27}\right)^2=-4\cdot\left(\frac{-343}{27}\right)-27\cdot\left(\frac{49}{729}\right)=\frac{1372}{27}-\frac{49}{27}=49.$

Exemplo 41. Já sabemos que $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutível, além disso, já está na forma reduzida. Assim, fica mais fácil calcular o seu discriminante, como podemos ver $\Delta^2=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2=-4\cdot 0^3-27\cdot(-2)^2=-108$.

Teorema 42. Seja f(x) ∈ K[x] um polinômio irredutível de grau 3. Se $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ são as raízes de f(x), o corpo de decomposição de f(x) será $K[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = K[\alpha_1,\Delta]$.

Exemplo 43. Obtemos no Exemplo 41 que o discriminante do polinômio $f(x) = x^3 - 2$ é $\Delta^2 = -108$. Pelo Teorema 42, podemos encontrar seu corpo de decomposição. Assim, como uma das raízes de $f(x)$ é $\sqrt[3]{2}$, temos $Gal\left(f/\mathbb{Q}\right)=\mathbb{Q}\left[\alpha_1,\ \right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\ \sqrt{-108}\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\ i\sqrt{3}\right]$.

Teorema 44. Sejam $f(x) \in K[x]$ um polinômio irredutível de grau 3 e $L = Gal(f,K)$ seu corpo de decomposição. Assim:

1. Se $\Delta \in K$ então $\Gamma(L:K) \simeq A_3$;
2. Se $\Delta \notin K$ então $\Gamma(L:K) \simeq S_3$.

Quando $\Delta \in K$, o corpo de decomposição de um polinômio $f(x) \in K[x]$ com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ será $K[\alpha_1, \Delta] = K[\alpha_1]$. Portanto, o grupo de Galois de $f(x)$ irá permutar as raízes, ou seja, os automorfismos serão da forma

$$Id = \begin{cases} \alpha_1 \to \alpha_1 \\ \alpha_2 \to \alpha_2 \\ \alpha_3 \to \alpha_3 \end{cases} \qquad \sigma = \begin{cases} \alpha_1 \to \alpha_2 \\ \alpha_2 \to \alpha_3 \\ \alpha_3 \to \alpha_1 \end{cases} \qquad \sigma^2 = \begin{cases} \alpha_1 \to \alpha_3 \\ \alpha_2 \to \alpha_1 \\ \alpha_3 \to \alpha_2 \end{cases}$$

visto que os corpos $K[\alpha_1], K[\alpha_2]$ e $K[\alpha_3]$ são isomorfos (pois são raízes do mesmo polinômio irredutível). Observe que estas permutações são iguais as permutações $\{Id,(123),132)\} = A_3$.

Exemplo 45. Considere o polinômio $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, cujo discriminante é $\Delta^2 = -4 \cdot (-3)3 - 27 \cdot 12 = 108 - 27 = 81$. Como $\Delta = \sqrt{81} = 9 \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$, concluímos que o grupo de Galois de $f(x)$ é A_3. Em especial, as raízes de $f(x)$ são $\alpha_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}$, $\alpha_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9}$ e $\alpha_3 = 2\cos\frac{14\pi}{9}$.

Exemplo 46. No Exemplo 40 vimos que $\Delta = \sqrt{\Delta^2} = \sqrt{49} = 7 \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$, portanto o polinômio $f(x) = x3 + x2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ possui grupo de Galois isomorfo ao A3.

Lembra-se quando comentamos que o corpo de decomposição de $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ não é uma extensão radical? Pois bem, havíamos calculado que o corpo de decomposição de $f(x)$ era $Q[\alpha_1]$, onde, assim $[\mathbb{Q}[\alpha_1] : \mathbb{Q}] = 3$. Pelo teorema fundamental de Galois, o grupo de Galois tem ordem 3, e como é subgrupo de S_3, a única possibilidade é A_3, indo de acordo com o que obtemos no Exemplo 46.

Exemplo 47. No Exemplo 41 calculamos $\Delta_2 = -108$, portanto $\Delta = \sqrt{-108} \notin \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$. Dessa forma, o grupo de Galois do polinômio $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ será S_3. Observe que ao estudar o grupo de Galois de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}[u]$, encontramos que $\sqrt{\Delta^2} = \sqrt{-108} = 6i\sqrt{3}$, que pertence a $\mathbb{Q}\left[i\sqrt{3}\right] \cong \mathbb{Q}\left[u\right]$. Portanto, neste caso, o grupo de Galois de $x^3 - 2$ sobre Q[u] é A_3, confirmando o que vimos no Exemplo 41.

5 POLINÔMIOS DE GRAU 4

Sejam $f(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ um polinômio irredutível sobre K e $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ e α_4 suas raízes. Se considerarmos $\beta_1 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4$, $\beta_2 = \alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4$ e $\beta_3 = \alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3$, o polinômio $r(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$ será chamado cúbica resolvente de $f(x)$. Por métodos computacionais obtemos $r(x) = x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x + 4bd - a^2d - c^2 \in K[x]$. Assim como nos polinômios de grau 3, $f(x)$ e $r(x)$ estão intimamente ligados, a começar pelo fato de seus discriminantes serem iguais. Além disso, como a cúbica resolvente é um polinômio de grau 3, já sabemos calcular o discriminante pela Proposição 39. Além disso, os subgrupos transitivos de S_4 são:

- O subgrupo de Klein V, gerado pelas permutações (12)(34) e (13)(24) isomorfo a $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$;
- O subgrupo cíclico C_4 (consequentemente abeliano) de ordem 4, gerado por pela permutação (1234) e isomorfo a $\mathbb{Z}_4$;
- O subgrupo D_4, grupo de simetrias do quadrado, gerado pelas permutações (1234) e (24);
- O subgrupo alternado A_4, gerado pelas permutações (123) e (234);
- S_4, gerado por (1234) e (12).

Teorema 48. Sejam $f(x) \in K[x]$ um polinômio irredutível de grau 4, $r(x)$ sua cúbica resolvente com corpo de decomposição E e Δ2 o discriminante de $f(x)$. Então, se G denota o grupo de Galois de $f(x)$ sobre K, temos:

1. $G \simeq V$ se e somente se $r(x)$ se divide em fatores lineares sobre K;
2. $G \simeq C_4$ se e somente $r(x)$ tem uma única raiz $t \in K$ e $h(x) = (x^2 - tx + d)(x^2 + ax + (b - t))$ se divide sobre E;

3. $G = D_4$ se e só se $r(x)$ tem uma única raiz $t \in K$ e $h(x)$ não se divide sobre E;

4. $G = A_4$ se e somente se $r(x)$ é irredutível sobre K e $\Delta \in K$;

5. $G = S_4$ se e somente se $r(x)$ é irredutível sobre K e $\Delta \notin K$.

Tabela 2.1: Critérios para calcular o grupo de Galois de um polinômio irredutível de grau 4

$\Delta = \sqrt{\Delta^2} \in K$?	Cúbica resolvente $r(x) \in K[x]$	$h(x)$ se divide em E?	Grupo de Galois
Sim	Redutível: todas as raízes $\in K$	———	V
Não	Redutível: uma única raiz $\in K$	Sim	C_4
Não	Redutível: uma única raiz $\in K$	Não	D_4
Sim	Irredutível	———	A_4
Não	Irredutível	———	S_4

Fonte: Os autores (2021)

Tabela 2.2: Polinômios irredutíveis de grau 4 com diferentes grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$	$r(x) \in \mathbb{Q}[x]$	Δ2	h(x): Se	Grupo de Galois
$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$	x(x – 2)(x – 4)	16^2	———	V
x4 + x3 + x2 + x + 1	(x – 2)(x2 + x – 1)	125	(x2 – 2x + 1)(x2 + x – 1): Sim	C4
x4 – 2	x(x2 + 8)	−2048	x2(x2 – 2): Não	D4
x4 – 7x2 – 3x + 1	x3 + 7x2 – 4x – 37	1832	———	A4
x4 – x3 + 1	x3 – 4x – 1	229	———	S4
x4 + x + 1	x3 – 4x – 1	229	———	S4
x4 + 8x + 12	x3 – 48x – 64	5762	———	A4
x4 – 4x3 + 4x2 + 6	x(x2 – 4x – 24)	64512	(x2 + 6)(x2 – 4x + 4): Não	D4
x4 – x3 + x2 – x + 1	(x – 2)(x2 + x – 1)	125	(x2 – 2x + 1)(x2 – x – 1): Sim	C4
x4 + 1	x(x – 2)(x + 2)	162	———	V

Fonte: Os autores (2021)

Na Tabela 2.1 apresentamos os critérios de forma resumida. Também apresentamos alguns exemplos, como pode ser observado na Tabela 2.2.

6 POLINÔMIOS DE GRAU 5

Assim como para polinômios de grau 4, também precisamos de um polinômio resolvente, que auxiliará no cálculo do grupo de Galois. Dado um polinômio de grau 5 irredutível da forma $f(x)=x^5-c_1x^4+c_2x^3-c_3x^2+c_4x-c_5\in\mathbb{Q}[x]$, a sexta resolvente $r_f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ será dada pela expressão $r_f(x)=(x^3+B_2x^2+B_4x+B_6)^2-2^{10}\cdot\Delta^2x$, em que Δ^2 é o discriminante de $f(x)$,

$$B_2=8c_1c_3-3c_2^2-20c_4,\ B_4=3c_2^4-16c_1c_2^2c_3+16c_1^2c_3^2+16c_2c_3^2+16c_1^2c_2c_4-8c_2^2c_4-112c_1c_3c_4+240c_4^2-64c_1^3c_5+240c_1c_2c_5-400c_3c_5$$ e $$B_6=8c_1c_2^4c_3-c_2^6-16c_1^2c_2^2c_3^2-16c_2^3c_3^2+64c_1c_2c_3^3-16c_1^2c_2^3c_4+28c_2^4c_4+64c_1^3c_2c_3c_4-112c_1c_2^2c_3c_4-128c_1^2c_3^2c_4+224c_2c_3^2c_4-64c_1^4c_4^2+224c_1^2c_2c_4^2-176c_2^2c_4^2-64c_1c_3c_4^2+320c_4^3+48c_1c_2^3c_5-192c_1^2c_2c_3c_5-80c_2^2c_3c_5+640c_1c_3^2c_5+384c_1^3c_4c_5-640c_1c_2c_4c_5-1600c_3c_4c_5-1600c_1^2c_5^2+4000c_2c_5^2$$

Tabela 2.3: Exemplos de polinômios irredutíveis f(x) de grau 5 e seus polinômios resolventes

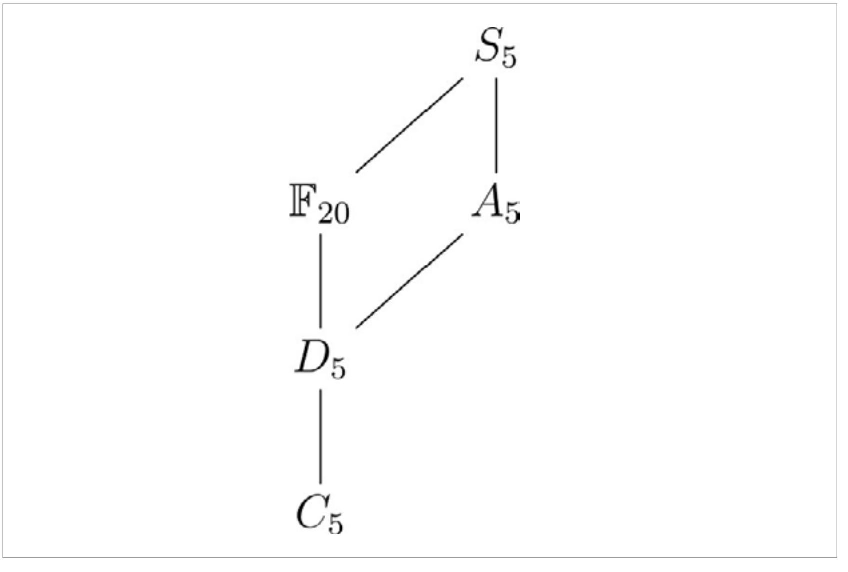
$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$	$r_f(x)\in\mathbb{Q}[x]$
$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$	$(x^3-132x^2+3872x)^2-2^{10}\cdot 11^4x$
$x^5-5x-12$	$(x^3+100x^2+6000x-40000)^2-2^{16}\cdot 10^6x$
x^5-2	$x^6-2^{10}\cdot 50000x$
$x^5+20x+16$	$(x^3-400x^2+96000x+2560000)^2-2^{11}\cdot 10^6x$
x^5-6x+3	$(x^3+120x^2+8640x-69120)^2+2^{10}\cdot 1737531x$
x^5-x+1	$(x^3+20x^2+240x-320)^2-2^{10}\cdot 2869x$
$x^5-2x^4-78x^3+159x^2-80x+1$	$(x^3-19196x^2+115022048x-212208108672)^2-2^{10}\cdot 7^4\cdot 38177^2x$
$x^5+15x+12$	$(x^3-300x^2+54000x+1080000)^2-2^{20}\cdot 3^4\cdot 5^5x$
$x^5-3125x-37500$	$(x^3+62500x^2+2343750000x-9765625000000)^2-2^{22}\cdot 5^{26}x$
$x^5-110x^3-55x^2+2310x+979$	$(x^3-82500x^2+1512500000x)^2-2^{10}\cdot 5^{20}\cdot 11^4x$

Fonte: Os autores (2021)

Na Tabela 2.3 apresentamos alguns polinômios de grau 5 juntamente com as suas respectivas sextas resolventes. Como já vimos anteriormente, os possíveis grupos de Galois de polinômios irredutíveis de grau 5 serão os subgrupos transitivos de S_5, que estão elencados abaixo:

- O subgrupo cíclico C_5, gerado pela permutação (12345) e isomorfo a $\mathbb{Z}_5$, cuja ordem é 5;
- O subgrupo D_5, grupo de simetrias do pentágono, que é gerado pelas permutações (12345) e (25)(34);
- O grupo de Frobenius F_{20}, cuja ordem é 20 e é gerado pelas permutações (12345) e (2354);
- O subgrupo alternado A_5, gerado pelas permutações (12345) e (13452);
- S_5, gerado por (12345) e (12).

Diagrama 2.1: Possíveis grupos de Galois de polinômios irredutíveis de grau 5.



Fonte: Os autores (2021)

Teorema 49. Seja $f(x)$ um polinômio separável e irredutível sobre $K[x]$. Então $G \subseteq S5$ será o grupo de Galois associado ao polinômio $f(x)$ se possui as seguintes propriedades:

1. $G \subseteq A_5$ se e somente se $\sqrt{\Delta^2} = \Delta \in K$.
2. $A_5 \subseteq G$ se e somente se $r_f(x)$ é irredutível sobre K.
3. G é conjugado a um subgrupo de F_{20} se e somente se a sexta resolvente $r_f(x)$ possui uma raiz em K.
4. G é conjugado ao subgrupo C_5 se e somente se $f(x)$ se divide completamente sobre $K[\alpha]$, em que α é uma raiz de $f(x)$.

Observe que o item 1 vai de acordo com o Corolário 27. Além disso, no item 4, dizer que $f(x)$ se divide completamente sobre $K[\alpha]$ é equivalente a dizer que $f(x)$ possui todas as suas raízes em $K[\alpha]$, ou seja, as demais raízes podem ser obtidas em termos de α.

O Teorema 49 contempla todas as opções de subgrupos transitivos de S_5, assim como pode ser observado na Tabela 4. Além disso, faremos um destaque para o enunciado deste teorema. Já vimos que os grupos transitivos possuem apenas uma classe de conjugação, então podemos enxergar G como um subgrupo de $\mathbb{F}_{20}$, podendo ser C_5, D_5 ou $\mathbb{F}_{20}$ no item 3 (já que são os únicos subgrupos transitivos de $\mathbb{F}_{20}$) e $G = C_5$ no item 4 (já que há um único subgrupo de C_5 que é transitivo, que é o próprio C_5).

Tabela 2.4: Critérios para determinar o grupo de Galois de um polinômio irredutível de grau 5

$\Delta = \sqrt{\Delta^2} \in K$?	$rf(x)$ tem raiz em K	$f(x)$ se divide complet. em $K[\alpha]$?	Grupo de Galois
Sim	Sim	Sim	C_5
Sim	Sim	Não	D_5
Não	Sim	———	$\mathbb{F}_{20}$
Sim	Não	———	A_5
Não	Não	———	S_5

Fonte: Os autores (2021)

A seguir, apresentamos alguns exemplos de polinômios irredutíveis de grau 5 e seus respectivos grupos de Galois. Observe que os polinômios acima foram tomados em $\mathbb{Q}[x]$. Se mudarmos o corpo base, o grupo de Galois também pode mudar. Para finalizar, vamos apresentar um exemplo prático elucidando a diferença entre calcular o grupo de Galois por meio dos automorfismos e por meio do método que apresentamos nesse material.

Tabela 2.5: Exemplos de polinômios irredutíveis f(x) de grau 5 com diferentes grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$	Δ^2	rf(x) tem raiz em $\mathbb{Q}$?	f(x) se fatora em $\mathbb{Q}[\alpha]$?	Grupo de Galois
$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$	11^4	Sim	Sim	C_5
$x^5 - 5x + 12$	$2^6 \cdot 10^6$	Sim	Não	D_5
$x^5 - 2$	50000	Sim	———	$\mathbb{F}_{20}$
$x^5 + 20x + 16$	210 · 106	Não	———	A_5
$x^5 - 6x + 3$	-1737531	Não	———	S_5
$x^5 - x + 1$	2869	Não	———	S_5
$x^5 - 2x^4 - 78x^3 + 159x^2 - 80x + 1$	$7^4 \cdot 38177^2$	Não	———	A_5
$x^5 + 15x + 12$	259200000	Sim	———	$\mathbb{F}_{20}$
$x^5 - 3125x - 37500$	212 · 526	Sim	Não	D_5
$x^5 - 110x^3 - 55x^2 + 2310x + 979$	520 · 114	Sim	Sim	C_5

Fonte: Os autores (2021)

Seja $f(x) = x^5 - 2$. Seja $L = Gal(x^5 - 2, \mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$) o corpo de decomposição do polinômio $f(x) = x^5 - 2$. As cinco raízes de f(x) são $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{2}u$, $\sqrt[5]{2}u^2$, $\sqrt[5]{2}u^3$ e $\sqrt[5]{2}u^4$, em que $u = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,sen\frac{2\pi}{5}$ é a raiz quinta da unidade. Temos assim $L = \mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2}, u\right]$. A partir de agora, vamos denotar $\sqrt[5]{2} = \beta$ a fim de facilitar a escrita. Sabemos que u é raiz do polinômio irredutível $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, assim $[\mathbb{Q}[\beta,u] : \mathbb{Q}[\beta]] = 4$. Além disso, como $x^5 - 2$ é o polinômio minimal de β, temos $[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] = 5$. Logo $[\mathbb{Q}[\beta,u] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\beta,u] : \mathbb{Q}[\beta]] \cdot [\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] = 4 \cdot 5 = 20$. Uma base para $\mathbb{Q}[\beta,u]$ visto como $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial é

$$\{1,\beta,\beta^2,\beta^3,\beta^4,u,\beta u,\beta^2u,\beta^3u,\beta^4u,u^2,\beta u^2,\beta^2u^2,\beta^3u^2,\beta^4u^2,u^3,\beta u^3,\beta^2u^3,\beta^3u^3,\beta^4u^3\}$$

Vamos calcular os $\mathbb{Q}$ -automorfismos de L. Como $\mathbb{Q}[\beta] \simeq \mathbb{Q}[\beta u]$, (já que são raízes do mesmo polinômio), vamos definir um $\mathbb{Q}$ -automorfismo σ de L por $\sigma(\beta) = \beta u$ e $\sigma(u) = u$. Da mesma forma, como u e u^2 são raízes do mesmo polinômio, vamos definir um $\mathbb{Q}$ -automorfismo τ de L por $\tau(\beta) = \beta$ e $\tau(u) = u^2$. Assim, $\sigma^5 = Id$ e $\tau^4 = Id$, onde Id é o homomorfismo identidade. Compondo tais automorfismos, obtemos todos os elementos do grupo de Galois, como pode ser observado na Tabela 2.6.

Assim, o grupo de Galois do polinômio $f(x)$ é $G = \langle\sigma,\tau\rangle = \{\sigma^i\tau^j \mid 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 3\}$ é um grupo de ordem 20, isomorfo ao grupo de Frobenius $\mathbb{F}_{20}$. Observe que $\tau\sigma = \sigma^2\tau$.

Vamos calcular a ordem dos elementos:

- Elementos de ordem 2: $\tau^2, \sigma\tau^2, \sigma^2\tau^2, \sigma^3\tau^2$ e $\sigma^4\tau^2$.
- Elementos de ordem 4: $\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau, \sigma^4\tau, \tau^3, \sigma\tau^3, \sigma^2\tau^3, \sigma^3\tau^3$ e $\sigma^4\tau^3$.
- Elementos de ordem 5: $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ e α^4.

Tabela 2.6: Q-automorfismos de Q [β,u]

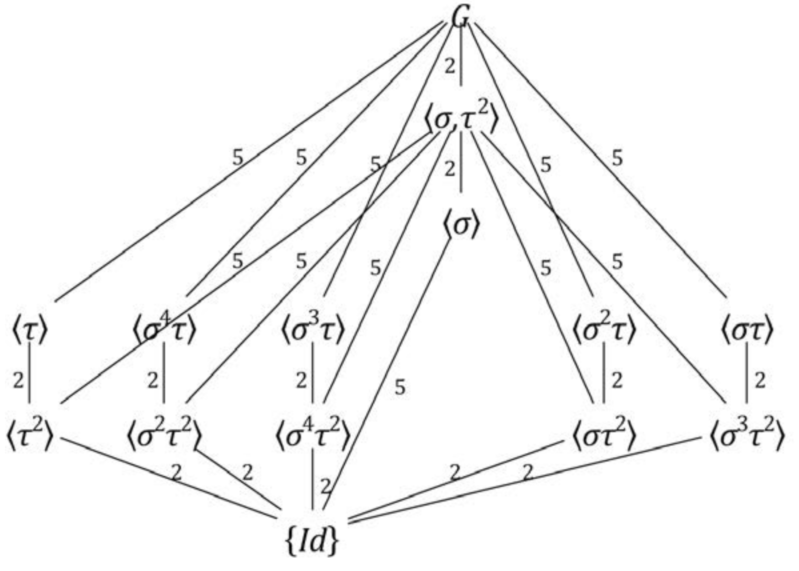
Automorfismo	Efeito em β	Efeito em u
Id	β	u
σ	βu	u
σ^2	βu^2	u
σ^3	βu^3	u
σ^4	βu^4	u
τ	β	u^2
$\sigma\tau$	βu	u^2
$\sigma^2\tau$	βu^2	u^2
$\sigma^3\tau$	βu^3	u^2
$\sigma^4\tau$	βu^4	u^2
τ^2	β	u^4
$\sigma\tau^2$	βu	u^4
$\sigma^2\tau^2$	βu^2	u^4
$\sigma^3\tau^2$	βu^3	u^4
$\sigma^4\tau^2$	βu^4	u^4
τ^3	β	u^3
$\sigma\tau^3$	βu	u^3
$\sigma^2\tau^3$	βu^2	u^3
$\sigma^3\tau^3$	βu^3	u^3
$\sigma^4\tau^3$	βu^4	u^3

Fonte: Os autores (2021)

Agora, vamos calcular os subgrupos de $G \simeq F20$ utilizando geradores:

$= \langle Id \rangle = \{Id\};$	$A = \langle \tau2 \rangle = \{Id,\tau2\} \simeq \mathbb{Z}_2;$
$C = \langle \sigma2\tau2 \rangle = \{Id,\sigma2\tau2\} \simeq \mathbb{Z}_2;$	$B = \langle \sigma\tau2 \rangle = \{Id,\sigma\tau2\} \simeq \mathbb{Z}_2;$
$D = \langle \sigma3\tau2 \rangle = \{Id,\sigma3\tau2\} \simeq \mathbb{Z}_2;$	$E = \langle \sigma3\tau2 \rangle = \{Id,\sigma4\tau2\} \simeq \mathbb{Z}_2;$
$S = \langle \tau \rangle = \{Id,\tau,\tau2,\tau3\} \simeq \mathbb{Z}_4;$	$V = \langle \sigma3\tau \rangle = \{Id,\sigma3\tau,\sigma4\tau2,\sigma\tau3\} \simeq \mathbb{Z}_2;$
$T = \langle \sigma\tau \rangle = \{Id,\sigma\tau,\sigma3\tau2,\sigma2\tau3\} \simeq \mathbb{Z}_4;$	$W = \langle \sigma4\tau \rangle = \{Id,\sigma4\tau,\sigma2\tau2,\sigma3\tau3\} \simeq \mathbb{Z}_4;$
$U = \langle \sigma2\tau \rangle = \{Id,\sigma2\tau,\sigma\tau2,\sigma4\tau3\} \simeq \mathbb{Z}_4;$	$X = \langle \sigma \rangle = \{Id,\sigma,\sigma2,\sigma3,\sigma4\} \simeq \mathbb{Z}_5;$
$Z = \langle \sigma,\tau2 \rangle = \{Id,\sigma,\sigma2,\sigma3,\sigma4,\tau2,\sigma\tau2,\sigma2\tau2,\sigma3\tau2,\sigma4\tau2\} \simeq D5;$	
$G = \langle \sigma,\tau \rangle \simeq \mathbb{F}_{20}.$	

Diagrama 2: Subgrupos do grupo de Galois de $f(x) = x^5 - 2$



Fonte: Os autores (2021)

Agora, vamos determinar os corpos intermediários da extensão $L : \mathbb{Q}$, onde $L = Gal(x1-2, \mathbb{Q})$. Os subgrupos normais de G são $\{Id\}$, $\langle\sigma\rangle \simeq Z5$, $\langle\sigma,\tau 2\rangle \simeq D5$ e G. Assim $I\dagger = L4$ e $G\dagger = Q$.

Como $\tau(\beta) = \beta$, segue que $\mathbb{Q}[\beta] \subseteq \langle\tau\rangle^{\dagger}$. Mas então $\langle\tau\rangle \subseteq \langle\tau\rangle^{\dagger *} \subseteq \mathbb{Q}[\beta]^{*5}$. Perceba que $[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] = 5$ e $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}] = 4$. Como $\mathbb{Q}[\beta]$ é um corpo intermediário, pelo Teorema Fundamental de Galois, temos $o(\mathbb{Q}[\beta]^*) = [L : \mathbb{Q}[\beta]] = 4$. Como $o(\langle\tau\rangle) = 4$, segue que $\langle\tau\rangle = \langle\tau\rangle^{\dagger *} = \mathbb{Q}[\beta]^*$, assim $S^{\dagger} = \langle\tau\rangle^{\dagger} = \mathbb{Q}[\beta]$. Da mesma forma concluímos que $X^{\dagger} = \mathbb{Q}[u]$.

Além disso, observe que:

$\sigma(u) = u$;	$\sigma 3\tau(\beta u2) = \beta u2$;
$\tau(\beta) = \beta$;	$\sigma 2\tau(\beta u3) = \beta u3$;
$\sigma 4\tau(\beta u) = \beta u$;	$\sigma 2\tau(\beta u3) = \beta u3$;

Como β, βu, βu^2, βu^3 e βu^4 são raízes do polinômio $x^5 - 2$, segue que os corpos $\mathbb{Q}[\beta]$, $\mathbb{Q}[\beta u]$, $\mathbb{Q}[\beta u^2]$, $\mathbb{Q}[\beta u^3]$ e $\mathbb{Q}[\beta u^4]$ são isomorfos, assim todos são fixos por subgrupos de ordem 4. Como $\sigma^4\tau(\beta u) = \beta u$, $\sigma^3\tau(\beta u^2) = \beta u^2$, $\sigma^2\tau(\beta u^3) = \beta u^3$ e $\sigma\tau(\beta u^4) = \beta u^4$, concluímos que $W^{\dagger} = \mathbb{Q}[\beta u]$, $V^{\dagger} = \mathbb{Q}[\beta u^2]$, $U^{\dagger} = \mathbb{Q}[\beta u^3]$ e $T^{\dagger} = \mathbb{Q}[\beta u^4]$, onde a notação $W^{\dagger}$ representa o corpo fixo de W.

Agora, vamos determinar o corpo fixo do subgrupo $Z = \langle\sigma,\tau^2\rangle$. Como $\tau^2(u) = u^4$ e $\tau^2(u^4) = u$, temos $\tau^2(u + u^4) = u + u^4$, ou seja, τ^2 fixa $u + u^4$. Da mesma forma, como $\sigma(u) = u$, σ também fixa $u+u^4$. Além disso, $\tau^2(u^2+u^3) = u^2+u^3$ e $\sigma(u^2+u^3) = u^2+u^3$, logo $u^2 + u^3$ também é fixado pelos automorfismos de Z.

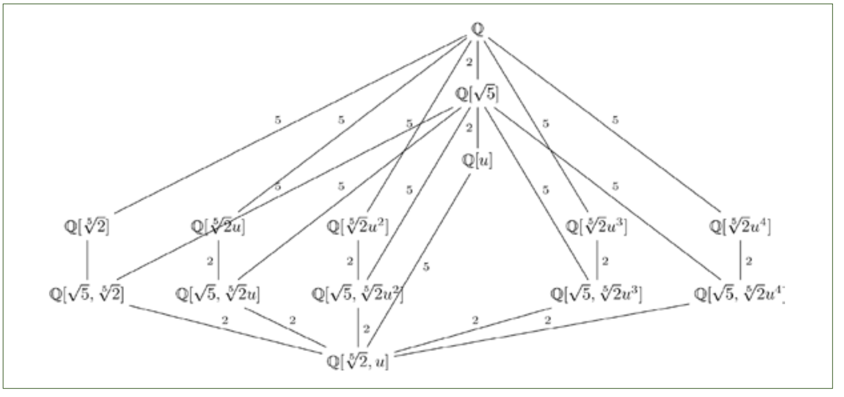
Seja $m_{u+u}4(x)$ o polinômio minimal associado ao elemento $u + u^4$, que possui grau 2. Como $u^2 + u^3$ também é fixo por Z, $u^2 + u^3$ deve ser a outra raiz de $m_{u+u}4(x)$. Assim $m_{u+u}4(x) = (x - (u + u^4))(x - (u^2 + u^3)) = x^2 - (u + u^2 + u^3 + u^4)x + (u + u^2 + u^3 + u^4)$. Sabemos que u é raíz do polinômio $f(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$, logo $u+u^2+u^3+u^4 = -1$, donde segue $m_{u+u}4(x) = x^2 + x - 1$. Como as raízes de $m_{u+u}4(x)$ são $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, obtemos que $\mathbb{Q}\left[u+u^4\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$. Como $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]:\mathbb{Q}\right]=\left[Z^{\dagger}:\mathbb{Q}\right]=2$, concluímos que $Z^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\ \mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$.

Agora resta encontrar os corpos fixos pelos subgrupos de ordem 2. Seja $A = \langle\tau^2\rangle$. Temos $A \subseteq Z$ e $A \subseteq S$, assim $Z^{\dagger} \subseteq A^{\dagger}$ e $S^{\dagger} \subseteq A^{\dagger}$, ou seja, $\mathbb{Q}\ \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subseteq A^{\dagger}$ e $\mathbb{Q}[\beta] \subseteq A^{\dagger}$, logo $\mathbb{Q}\ \mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta] \subseteq A^{\dagger}$. Como $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta\right]:\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]:\mathbb{Q}\right]=2\cdot 5=10$

1 Para cada corpo intermediário M com $K \subseteq M \subseteq L$ definimos o grupo $M* = \Gamma(L : M)$ de todos os M−automorfismos de L.

e [$A^{\dagger}$: $\mathbb{Q}$] = 10, segue que $A^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta]$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta\right]$. Da mesma forma, encontramos os demais corpos fixos: $C^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta u]$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta u\right]$, $E^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta u^2]$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta u^2\right]$, $B^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta u^3]$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta u^3\right]$ e $D^{\dagger}=\mathbb{Q}[\sqrt{5},\beta u^4]$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5},\beta u^4\right]$. Apresentamos o diagrama dos corpos intermediários:

Diagrama 3: Diagramas dos corpos intermediários da extensão $\mathbb{Q}\left[\hat{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{u}\right]:\mathbb{Q}$.



Fonte: Os autores (2021)

Vamos determinar o grupo de Galois de $f(x)=x^5-2$ utilizando o Teorema 49. Note que $\Delta_f^2=50000$. Como $r_f(x)=x^6-2^{10}\cdot 50000x$, rf(x) tem uma raiz em que $\mathbb{Q}$ que é 0. Como f(x) não se fatora em $\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2}\right]$, concluímos que o grupo de Galois de f(x) é $\mathbb{F}_{20}$. Mas, e se quisermos calcular o grupo de Galois de f(x) sobre $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$?

Pela Tabela 2.5, temos $\Delta^2=50000$ e $r_f(x)=x^6-2^{10}\cdot 50000x$ = $x^6-2^{14}\cdot 5^5x$. Observe que $\sqrt{\Delta^2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$, rf(x) possui uma raiz em $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$ e f(x) não se divide completamente em K[α], em que $\alpha=\sqrt[5]{2}$. Logo, utilizando o Teorema 49 concluímos que o grupo de Galois de f(x) sobre $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$ é D5. De fato, observe o diagrama dos corpos intermediários 3. Temos $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2},u\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]\right]=5\cdot 2=10=o\left(D_5\right)$.

Como vimos ao longo deste trabalho, os polinômios irredutíveis de grau 5 nem sempre são solúveis por radicais, visto que A_5 e consequentemente S_5 não são grupos solúveis. Assim, terminamos este trabalho apresentando a seguinte proposição:

Proposição 50. Seja f(x) ∈ K[x] um polinômio irredutível de grau 5, com char K = 0. Então f(x) é solúvel por radicais se e somente se o grupo de Galois Gal (f,K) é isomorfo a um subgrupo de F_{20}.

CONCLUSÃO

A busca por soluções de equações polinomiais movimentou a matemática ao longo dos séculos, possibilitando o surgimento de inúmeros avanços nas mais diversas áreas da matemática. A teoria de Galois é responsável por responder satisfatoriamente uma das questões que intrigou os matemáticos ao longo de milênios, envolvendo com maestria tópicos das teorias de grupos e corpos, explicando por que nem todos os polinômios com grau maior ou igual a 5 são solúveis por radicais. Nesse artigo apresentamos técnicas que permitem classificar o grupo de Galois de qualquer polinômio com grau menor ou igual a 5, vislumbrando porquê nem todos os polinômios são solúveis por radicais.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. F. S. **Tópicos especiais em álgebra**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 172 p.

AWTREY, C.; BEUERLE, J.; KEENAN, M. Algorithms for computing quartic Galois Groups over fields of characteristic 0. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, [*s.l.*], v. 112, n. 4, p. 709-740, 2017.

AWTREY, C.; CESARSKI, T.; JAKES, P. Determining galois groups of reducible polynomials via discriminants and linear resolvents. **Mathematics Subject Classification**, [*s.l.*], p. 1-10, 2010. Disponível em: https://facstaff.elon.edu/cawtrey/acj-reducible.pdf. Acesso em: 14 set. 2020.

BARAI, R. On determination of Galois group of quartic polynomials. **Indian Mathematical Society**, Maharashtra, [*s.l.*], v. 87, p. 73-85, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/334389725_ON_ DETERMINATION_OF_GALOIS_GROUP_OF_QUARTIC_POLYNOMIALS. Acesso em: 28 jul. 2020.

BERGLUND, J. Analyzing the Galois groups of fifth-degree and fourth-degree polynomials. **Undergraduate Review**, [*s.l.*], v. 7, p. 22-28, 2011. Disponível em: https://vc.bridgew.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.com/&httpsredir=1&article=1182&context=undergrad_rev. Acesso em: 20 ago. 2020.

CONRAD, K. Galois groups of cubic's and quartic's (Not in characteristic 2). **Expository papers**, [*s.l.*], v. 10, 2010. Disponível em: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf. Acesso em: 29 jul. 2020.

CONRAD, K. Galois groups as permutation groups. **Keith Conrad.** [s.l.: s.n.], 2010. Disponível em: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/ galoisaspermgp.pdf. Acesso em: 27 jul. 2020.

CRUZ, K. B. **Introdução à teoria de Galois**. Orientador: Waldeck Schützer. 2014. 117 p. Monografia (Licenciatura e Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2014. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/46. Acesso em: 29 fev. 2020.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

DUMMIT, D. S. **Solving solvable quintics**. American Mathematical Society, [*s.l.*], v. 57, n. 195, p. 387-401, jul. 1991. Disponível em: https://www.ams.org/journals/mcom/1991-57-195/S0025-5718-1991-1079014-X/ S0025-5718-1991-1079014-X.pdf. Acesso em: 16 fev. 2021.

FREIRE, R. A. **Os fundamentos do pensamento matemático no século XX e a relevância fundacional da teoria de modelos**. 2009. 127 f. Tese (Doutorado em...) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2009. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp. br/handle/REPOSIP/281061. Acesso em: 03 abr. 2020.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARCIA, A.; IEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GUDKOV, K. Y.; LUR'E, B. B. Cyclic galois extensions for quintic equation. **Journal of Mathematical Sciences**, [*s.l.*], v. 222, p. 417-425, 4 abr. 2017.

HOWIE, J. M. **Fields and Galois theory**. London: Springer-Verlag, 2006.

KAVANAGH, R. On irreducible rational quintics. **Mathematics Subject Classification**, 2010. Disponível em: https://rak.ac/publication/ 2014-on-irreducible-rational-quintics/galois.pdf. Acesso em: 28 set. 2020.

LAVALLEE, M. J. **Dihedral quintic fileds with a power basis**. 2008. Thesis (Master of Science) – The University of British Columbia. Okanagan, 2008.

MORANDI, P. **Field and Galois theory**. New York: Springer-Verlag, 1996.

ROTH, R. L. On extensions of Q by square roots. **The American Mathematical Monthly**, [*s.l.*], n. 4, v. 78, p. 392-393, 1971. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/ abs/10.1080/00029890.1971.11992772. Acesso em: 25 jun. 2021.

STEWART, I. N. **Galois theory**. 3. ed. [*S.l.*], CRC, 2004.

AUTORES

ADINA VERONICA REMOR

http://lattes.cnpq.br/0248330031742746

Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - *campus* Toledo. Tetra-medalhista da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Participou por quatro anos do Programa de Iniciação Científica Jr., com bolsa de Iniciação Científica durante os ensinos Fundamental e Médio. Participou do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), na área de Álgebra. Mestra do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, com interesse em teoria de representações de álgebras e super álgebras de Lie.

ADRIANO GOMES DE SANTANA

http://lattes.cnpq.br/6902591149015716 • https://orcid.org/0000-0003-1714-8434

Licenciatura em matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (2013). Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor assistente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Toledo.

ALINE KERYN PIN

http://lattes.cnpq.br/2983070806289495 • https://orcid.org/0000-0002-3355-8604

Doutora no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciência e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Mestre em Educação pelo Programa de Pós-Graduação *stricto sensu*, Nível Mestrado em Educação, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), *campus* Cascavel. Proficiente em tradução interpretação Libras/Português/Libras pelo PROLIBRAS, certificado pelo MEC/UFSC/INES. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Toledo.

ANA MARIA COSTA SPOHR

http://lattes.cnpq.br/7107179908493540

Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Toledo. Professora nas disciplinas de Matemática, Pensamento Lógico e Eletiva - Jogos Matemáticos. Foi bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e do Programa Residência Pedagógica (RP). Voluntária, de um Projeto de Extensão de Jogos Pedagógicos.

ARACELI CIOTTI DE MARINS

http://lattes.cnpq.br/8167067607247849 • https://orcid.org/0000-0001-8932-7015

Licenciatura em Matemática. Mestre em Engenharia Agrícola pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Doutora em Ciência do Solo, com ênfase em variabilidade espacial de atributos Físicos do Solo pela Universidade Federal de Santa Maria. Pós-Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Professora titular da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Toledo. Professora na Graduação, Licenciatura em Matemática e Engenharias, nas disciplinas de CDI 1 e CDI 2 . Atua nos Programas de Pós-Graduação: PPGEA (UNIOESTE) Cascavel e PROFMAT, *campus* Toledo.

BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES

http://lattes.cnpq.br/0374183564751938 • https://orcid.org/0000-0002-7763-7777

Professora de Licenciatura em Matemática (UTFPR-TD). Atua no PROFMAT/TD e PPGECEMTE/UFPR. Doutorado em Educação pela PUCPR. Doutorado sanduíche na UNL/UIED-Portugal. Pós-doutorado pelo PPGECT– UFSC, voltado à consulta nos Arquivos de Jean Piaget na Universidade de Genebra (UNIGE). É uma coordenadoras do Projeto de Extensão “Grupo da Quarta” – coletivo de professores que ensinam matemática. Coordenou PIBID e Residência Pedagógica. Experiência em História da Educação Matemática e formação de professores que ensinam matemática. Líder do GHEMAT-PR e integrante do GEPEEM-TD.

BRUNO GABRIEL MIRÓ

http://lattes.cnpq.br/1634235223188725

Egresso do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo. Atualmente, trabalha na empresa Sicredi.

DAIANE APARECIDA PEGO

http://lattes.cnpq.br/6599525322286273

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Especialização em Alfabetização Matemática e Distúrbios de Aprendizagem; Educação Especial e Inclusiva; Neuroaprendizagem; Gestão Escolar; Educação de Jovens e Adultos — especializações feitas na modalidade EAD (UNINA). Professora da Prefeitura de Santa Helena. Licencianda em Arte, modalidade EAD (Faveni).

DANIELA TRENTIN NAVA

http://lattes.cnpq.br/6681448607094595 • https://orcid.org/0000-0003-2131-3754

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (2004), Mestrado em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco (2006) Doutorado sanduíche em Engenharia Agrícola pela Unioeste/ Universidad de Valparaíso. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, ministrando aulas de Estatística e Probabilidade e Estatística.

EDUARDA DEBORTOLI DA SILVA

http://lattes.cnpq.br/0189260165687027

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, campus Toledo. Já atuou como bolsista nos programas financiados pela CAPES: PIBID e Residência Pedagógica. Professora do Ensino Fundamental e Médio, pelo estado do Paraná.

EDUARDO VENDRAMINI

http://lattes.cnpq.br/9930781774199378

Estudante de Engenharia Eletrônica na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com trabalhos em eventos voltados à estatística. Estudou na Hochschule Mannheim, Alemanha, por três semestres. Foi professor de inglês. Foi programador para a Buhl, empresa alemã. Participou do grupo Delta Racing, responsável pelo desenvolvimento de um minifórmula na Hochschule Mannheim.

EMERSON TORTOLA

http://lattes.cnpq.br/3984024867334867 • https://orcid.org/0000-0002-6716-3635

Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Toledo, e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR, *campi* Cornélio Procópio e Londrina. Licenciatura em Matemática pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (Fecilcam), atual Universidade Estadual do Paraná (Unespar), *campus* de Campo Mourão. Mestrado, Doutorado, Pós-doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Vice-diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, regional Paraná (SBEM-PR).

FÚLVIO NATÉRCIO FEIBER

http://lattes.cnpq.br/5715075036217081

Graduação em Arquitetura e Urbanismo pela PUC-PR. Especialização em Paisagismo. Mestre em Gestão Urbana. Doutor em Engenharia de Produção com ênfase em Ergonomia. Professor e pesquisador da UTFPR-TD.

GUSTAVO HENRIQUE DALPOSSO

http://lattes.cnpq.br/8040071176709565 • https://orcid.org/0000-0003-2097-5748

Licenciado em Matemática pela UNIOESTE. Foi bolsista CNPq/Pibic durante dois anos e meio no período da graduação. Mestre em Engenharia Agrícola pela UNIOESTE, bolsista CAPES. Doutor em Engenharia Agrícola pela UNIOESTE, bolsista da Fundação Araucária. Professor na UTFPR na cidade de Toledo (PR). Membro do Conselho Universitário (COUNI). Responsável pela Coordenação do Mestrado Profissional em Tecnologias em Biociências, do *campus* Toledo.

HELOISA CRISTINA DA SILVA

http://lattes.cnpq.br/1937976048599313 • https://orcid.org/0000-0002-5879-1824

Graduação em Matemática, Licenciatura pela Universidade Federal de Santa Catarina. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professora adjunta, nível 2, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná com interesse em didática da matemática, utilização de jogos no ensino de matemática e formação de professores.

JOCELAINE CARGNELUTTI

http://lattes.cnpq.br/1606344234613977

Graduação em Matemática. Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Mestrado em Geodésia Física, pela Universidade Federal de Santa Maria. Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática, pela Universidade Federal do Paraná. Professora adjunta na UTFPR. Foi professora-orientadora do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC/OBMEP). Moderadora do Fórum da OBMEP. Trabalha com equações diferenciais abordadas por meio de métodos numéricos, em particular método das diferenças finitas e o Lattice Boltzmann Method (LBM) para simulação de escoamento de fluidos.

LARISSA ARIANNA MEKELBURG DA SILVA

Licenciatura em matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Toledo. Durante a graduação participou de projetos envolvendo a gamificação, inclusive seu Monografia foi na área de design de jogos. Professora de Matemática e de Pensamento Computacional pelo estado do Paraná.

LUIZ GABRIEL MARTINS

http://lattes.cnpq.br/6770668341724883

Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Mestrando em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná. Experiência na área de Matemática Aplicada, com ênfase em dinâmica dos fluidos.

MÁRCIO PAULO DE OLIVEIRA

http://lattes.cnpq.br/3019781365469075 • https://orcid.org/0000-0003-0433-9784

Professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Graduação em Matemática. Mestrado e Doutorado em Engenharia Agrícola pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Pesquisador na área de Estatística Espacial, Modelagem de Concordância e Modelos Longitudinais.

RENATO FRANCISCO MERLI

http://lattes.cnpq.br/4313837720967509 • https://orcid.org/0000-0002-6781-2914

Professor Adjunto na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo. Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, com período sanduíche na Rutgers University, Newark, Estados Unidos. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Mestrado em Filosofia pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo. Especialização em Educação a Distância, pela Faculdade de Apucarana. Licenciatura em Matemática, com Ênfase em Informática, pela Faculdade de Apucarana.

ROBSON WILLIANS VINCIGUERRA

http://lattes.cnpq.br/3992629684506399 • https://orcid.org/0000-0002-0611-2471

Graduação em Matemática pela Universidade Paranaense. Mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra. Professor adjunto do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

RODOLFO EDUARDO VERTUAN

http://lattes.cnpq.br/7270314006427713 • https://orcid.org/0000-0002-0695-3086

Professor da UTFPR. Professor do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT/UTFPR). Professor do Mestrado e Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/Unioeste). Licenciatura em Matemática. Especialização em Educação Matemática. Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Foi diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, regional PR, de 2013 a 2019, e Diretor-Geral do *campus* Toledo da UTFPR, de 2018 a 2021. Coordenador do Grupo de Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM). Coordenador da Usina do Conhecimento de Toledo-PR.

ROSANGELA APARECIDA BOTINHA ASSUMPÇÃO

http://lattes.cnpq.br/5532192685456247

Graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Especialização em Tecnologia Python para Negócios pela UTFPR. Mestrado em Engenharia Agrícola pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Doutorado em Engenharia Agrícola pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Pós-doutorado em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco.

SUELLEN RIBEIRO PARDO GARCIA

http://lattes.cnpq.br/2528372979296551 • https://orcid.org/0000-0003-3397-0559

Professora na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Possui Licenciatura em Matemática pela UNESP. Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL. Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia pela UFPR. Experiência na área de modelos estatísticos para monitoramento e segurança de barragens.

THAIS PAULA PRUNZEL

http://lattes.cnpq.br/2565075537687723

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Toledo. Graduanda em Pedagogia, segunda licenciatura, pela UNINA. Professora de escolas públicas, por meio do Processo Seletivo Simplificado – PSS, no estado do Paraná.

VANDERLEI GALINA

https://lattes.cnpq.br/5475732008218495

Graduação em Matemática pela UNESPAR. Mestrado e Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professor associado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Toledo. Trabalha com o estudo de equações diferenciais na simulação numérica de escoamento de fluidos utilizando o Métodos das Diferenças Finitas (MDF) e o Método do Reticulado de Boltzman (LBM).

VANESSA LARGO ANDRADE

http://lattes.cnpq.br/9398939064935155 • https://orcid.org/0000-0001-9286-2377

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Especialização em Ensino de Ciências e Matemática pela UNIOESTE. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela

Universidade Estadual de Londrina (UEL) e doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/Toledo), atuando principalmente no curso de Licenciatura em Matemática.

WILIAN FRANCISCO DE ARAUJO

https://lattes.cnpq.br/7249767497977388 • https://orcid.org/0000-0002-8064-2147

Graduação em Licenciatura em matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor associado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

A foto de capa[1] foi tirada no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo, e remete a uma dentre tantas experiências significativas realizadas com o uso do Ábaco de Frações, já utilizado com centenas de alunos em projetos como o PIBID, Residência Pedagógica, Oficinas e estágios, bem como no contexto da formação continuada de professores. Da esquerda para a direita temos os estudantes Adriana Livi, Gustavo Henrique Zanette e Cleber Cavalcante. Ao fundo, o símbolo do curso, criado pela egressa Renata Gonçalves e escolhido pelos pares em uma seleção realizada pelo colegiado do curso, desde então, nossa marca registrada.

A foto é institucional e pertence ao acervo do curso.

[1] Nota da editora: foi utilizado um recurso visual, criando um efeito na imagem original para dar mais plasticidade e uma identidade visual mais artística apesar de o tema ser mais técnico.

Este livro apresenta o esforço coletivo realizado por 18 professores, junto de egressos e colaboradores do Curso de Licenciatura em Matemática, em apresentar um panorama das ações desenvolvidas nos 10 anos de sua existência. Como uma fotografia, é impossível relatar tudo que foi desenvolvido: organização de inúmeros eventos (regionais, nacionais e internacionais), gincanas, oficinas, projetos de extensão, eventos culturais, programa de Licenciaturas Internacionais, pesquisas científicas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Pura e Aplicada, pós-graduação, parcerias com o poder público, secretarias e regionais de Educação.

Esta obra é dedicada às pessoas comprometidas com a busca de novos caminhos para a educação. Pois acreditamos que com bom humor, gentileza e empatia esse árduo trabalho pode ressignificar histórias e construir caminhos.

"Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros". (Paulo Freire, Pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987).

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MATEMÁTICA

ISBN 978-65-6115-067-5
9 786561 150675