

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**NOME DO/A MESTRANDO/A PROFMAT**

**COLOCAR AQUI O TÍTULO DA DISSERTAÇÃO**

**CURITIBA**

**2020**

**NOME DO/A MESTRANDO/A PROFMAT**

**COLOCAR AQUI O TÍTULO DA DISSERTAÇÃO**

**Colocar aqui o título em inglês**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre(a) no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Linha de pesquisa: Colocar aqui o nome da linha de pesquisa.

Orientador(a): Colocar aqui o nome do Orientador

Coorientador(a): Colocar aqui o nome do Coorientador

**CURITIBA**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuem ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



**Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Curitiba**



FABIO JARDIM DE ALMEIDA

### **DESMISTIFICANDO A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 31 de Maio de 2022

Dr. Rudimar Luiz Nos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Fabiano Steklain Lisboa, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Eduardo Gueron, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/05/2022.

*Dedico este trabalho a ...*

## **AGRADECIMENTOS**

Colocar aqui os agradecimentos. As duas primeiras frases devem ser mantidas; a terceira frase deve ser mantida se o mestrando recebeu bolsa da Capes.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.*  
René Descartes (1596 - 1650): filósofo, físico  
e matemático francês.

## RESUMO

SOBRENOME, Nome completo. **Título da dissertação em português.** (no. de páginas) f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Escrever o resumo do trabalho, com no mínimo 100 palavras e no máximo 250 palavras. Um resumo acadêmico deve sempre seguir as normas da ABNT, seja ele expandido, crítico ou informativo. O resumo deve conter uma sequência com introdução (tema e objetivos), metodologia empregada, análise e conclusão.

**Palavras-chave:** xxxxx1; xxxxx2; xxxxx3; xxxxx4.

## ABSTRACT

SOBRENOME, Nome completo. **Título da dissertação em inglês.** (no. paginas) pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Traduzir para o inglês o resumo do trabalho em português.

**Keywords:** xxx1; xxxxx2; xxxxx3; xxxxx4.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ secantes à esfera . . . . .	22
Figura 4.2 – Plano $\alpha$ : (a) tangente à esfera de centro $O$ e raio $r$ ; (b) secante à esfera de centro $O$ e raio $r$ . . . . .	22
Figura 4.3 – Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ secantes à esfera . . . . .	23
Figura 4.4 – Sequência de aproximações gerada pelo método de Newton-Raphson . . . .	23
Figura 4.5 – A anticlépsidra e uma parte da clépsidra . . . . .	24
Figura 4.6 – Volume da esfera: (a) anticlépsidra; (b) uma parte da clépsidra . . . . .	25
Figura 4.7 – Volume da esfera: (a) anticlépsidra; (b) uma parte da clépsidra . . . . .	26
Figura 4.8 – A anticlépsidra e uma parte da clépsidra . . . . .	26

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Relações de Arquimedes para o volume da esfera de raio $R$ . . . . .	27
Tabela 5.2 – Aproximação da maior raiz de $f(x) = e^x - 4x - 3$ pelo método de Newton-Raphson . . . . .	27
Tabela 5.3 – Aproximação da maior raiz de $f(x) = e^x - 4x - 3$ pelo método de Newton-Raphson . . . . .	27

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma$	Letra grega Gama
$\Lambda$	Lambda
$\zeta$	Letra grega minúscula zeta
$\in$	Pertence

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1	Justificativa para a escolha do tema . . . . .	17
1.2	Revisão da bibliografia . . . . .	17
1.3	Objetivos . . . . .	17
1.3.1	Objetivo geral . . . . .	17
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	17
1.4	Procedimentos metodológicos . . . . .	17
1.5	Estrutura do trabalho . . . . .	17
<b>2</b>	<b>CITAÇÕES . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1	Indiretas . . . . .	18
2.2	Diretas . . . . .	18
<b>3</b>	<b>AMBIENTES MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES . . . . .</b>	<b>19</b>
3.1	Ambientes matemáticos . . . . .	19
3.2	Equações . . . . .	20
<b>4</b>	<b>FIGURAS . . . . .</b>	<b>22</b>
4.1	O pacote subfigure . . . . .	22
4.2	O pacote wrapfigure . . . . .	23
4.3	Outros exemplos de figuras . . . . .	23
<b>5</b>	<b>TABELAS . . . . .</b>	<b>27</b>
5.1	Tabelas diversas . . . . .	27
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>28</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>29</b>
	<b>Índice . . . . .</b>	<b>30</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

## 1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 OBJETIVO GERAL

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

## 1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, a saber:

★ Capítulo 1;

- Capítulo 2;

- Capítulo 3.

*i)* Capítulo 1;

b) Capítulo 2;

1. Capítulo 3.

## 2 CITAÇÕES

NBR 10520, atualizada em julho de 2023. Consultar as normas ABNT em <<https://webapp.utfpr.edu.br/bibservices/gedWeb>>.

### 2.1 INDIRETAS

Segundo Posamentier e Salkind (1988), ...

Tavares construiu as figuras que ilustram as demonstrações de lemas e teoremas, bem como definições, no software de geometria dinâmica GeoGebra 3D (Tavares, 2019).

### 2.2 DIRETAS

#### 1. Até três linhas.

Em Tavares (2019, p. 36), “todas as figuras que ilustram as demonstrações de lemas e teoremas, bem como definições, foram construídas com o software de geometria dinâmica GeoGebra 3D”.

#### 2. Quatro linhas ou mais.

Realizamos uma pesquisa bibliográfica em livros de geometria, dissertações de mestrado do Profmat, artigos acadêmicos, sites especializados em geometria e revistas, para catalogar diferentes estratégias para comprovar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica. Na pesquisa, constatamos, por exemplo, que a literatura aborda o volume da esfera por intermédio do método da exaustão inscrevendo cilindros retos na semiesfera. Contudo, não encontramos referências ao uso do mesmo método com a inscrição de troncos de cone retos de bases paralelas na semiesfera.

Na construção das figuras que compõem a dissertação, sempre relevantes em um trabalho de geometria, optamos pelo GeoGebra 3D por este ser um aplicativo gratuito. Assim, todas as figuras que ilustram as demonstrações de lemas e teoremas, bem como definições, foram construídas com o software de geometria dinâmica GeoGebra 3D (Tavares, 2019, p. 36).

### 3 AMBIENTES MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES

**Definição 3.1.** *Seja ...*

**Problema 3.1.** *Para ...*

**Teorema 3.1** (de Pitágoras). *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Segundo o Teorema 3.1 ...

#### 3.1 AMBIENTES MATEMÁTICOS

Segundo o Teorema de Pitágoras, temos que  $a^2 = b^2 + c^2$

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.1)$$

Em (3.1),  $a$  é a medida da hipotenusa e  $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Das investigações que efetuamos, concluímos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2; \\ b &= \frac{z}{4}; \\ c &= \sqrt{x + y}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em (3.2),  $x$  é a medida ...

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{e^{3x^5 - 2x^3 + 5}} dx$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \approx & \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} n - \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} \right] + \\ & + \frac{\pi}{3} r^3 \left[ -\frac{1}{n^3} n + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Analisando a soma  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , concluimos que:

### 3.2 EQUAÇÕES

$$\begin{aligned} R_x \cdot R_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \operatorname{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ -\operatorname{sen} \beta \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \neq I_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{\frac{\rho^2 - x^2 + x^2}{\rho^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{\rho}^{\rho} f(x) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

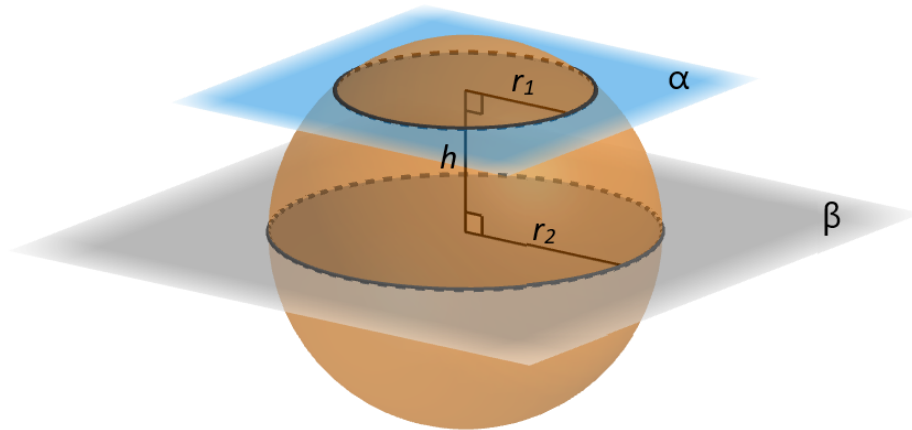
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} n - \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} n + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) + \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} = \frac{2}{3} = 0, \bar{6},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} = \frac{2}{3} = 0, \bar{6}, \quad (3.7)$$

## 4 FIGURAS

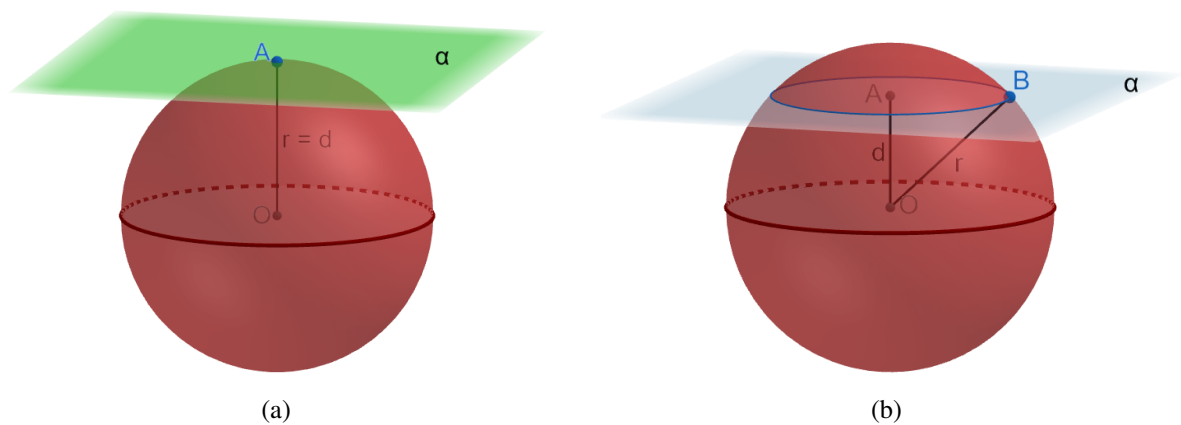
Figura 4.1 – Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  secantes à esfera



Fonte: Tavares (2019).

### 4.1 O PACOTE SUBFIGURE

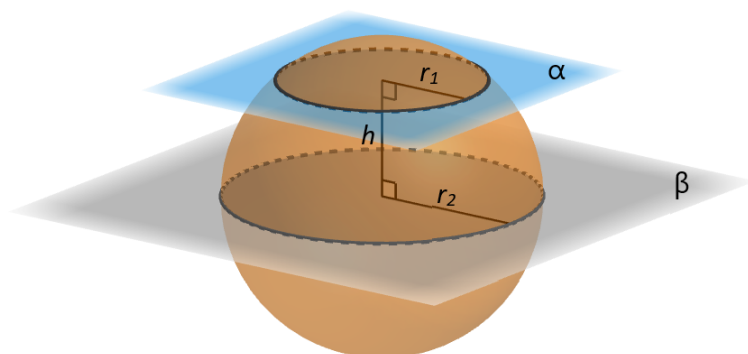
Figura 4.2 – Plano  $\alpha$ : (a) tangente à esfera de centro  $O$  e raio  $r$ ; (b) secante à esfera de centro  $O$  e raio  $r$



Fonte: Tavares (2019).

## 4.2 O PACOTE WRAPFIGURE

Figura 4.3 – Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  secantes à esfera



Fonte: Tavares (2019).

O segmento esférico pode ser definido a partir da seção da esfera por planos secantes. Assim, dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ , secantes à esfera, definem três segmentos esféricos, ilustrados na Figura 4.3: um segmento esférico de duas bases, compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e dois segmentos esféricos de uma base.

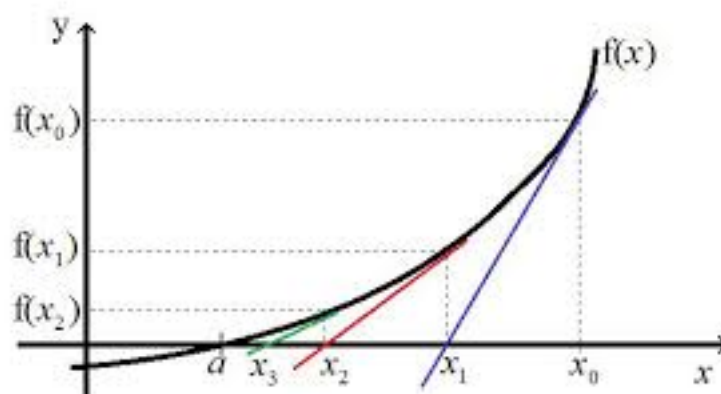
**Definição 4.1.** *Segmento esférico é um sólido de revolução cuja geratriz é um semisegmento circular de uma ou duas bases e cujo eixo*

*é uma reta perpendicular às bases do segmento circular.*

O segmento esférico pode ser definido a partir da seção da esfera por planos secantes. Assim, dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ , secantes à esfera, definem três segmentos esféricos, ilustrados na Figura 4.3: um segmento esférico de duas bases, compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e dois segmentos esféricos de uma base.

## 4.3 OUTROS EXEMPLOS DE FIGURAS

Figura 4.4 – Sequência de aproximações gerada pelo método de Newton-Raphson



Fonte: Tavares (2019).

Figura 4.5 – A anticlépsidra e uma parte da clépsidra



Fonte: Tavares (2019).

A Figura 4.5 ilustra ...

Figura 4.6 – Volume da esfera: (a) anticlépsidra; (b) uma parte da clépsidra



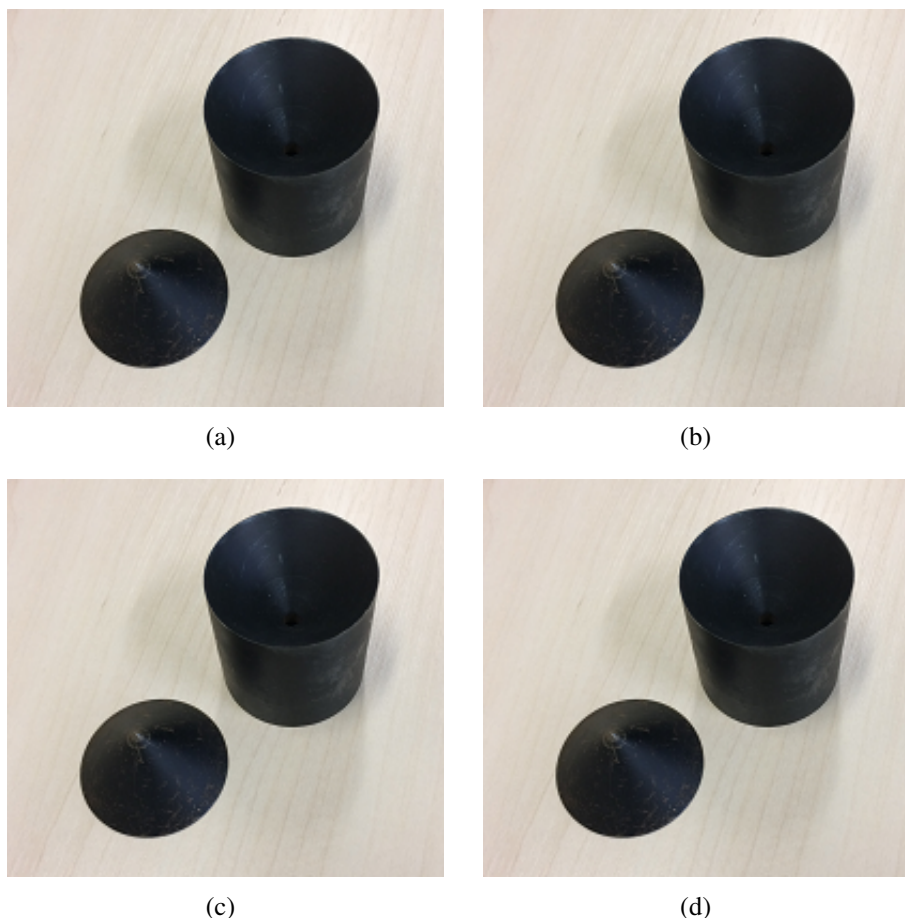
(a)



(b)

Fonte: (a) Tavares (2019); (b) Silva (2020).

Figura 4.7 – Volume da esfera: (a) anticlépsidra; (b) uma parte da clépsidra



Fonte: (a) Tavares (2019); (b) Silva (2020).

Figura 4.8 – A anticlépsidra e uma parte da clépsidra



Fonte: Tavares (2019).

Durante a resolução da questão mencionada acima, numa turma de preparação olímpica, um aluno me perguntou: "Professor, quantos polígonos elegantes existem? ". A discussão promovida a partir da indagação do aluno me motivou à escrita deste artigo" (Silva, 2020, p. 22).

Durante a resolução da questão mencionada acima, numa turma de preparação olímpica, um aluno me perguntou: "Professor, quantos polígonos elegantes existem? ". A discussão promovida a partir da indagação do aluno me motivou à escrita deste artigo (Silva, 2020, p. 22).

Durante a resolução da questão mencionada acima, numa turma de preparação olímpica, um aluno me perguntou: "Professor, quantos polígonos elegantes existem? ". A discussão promovida a partir da indagação do aluno me motivou à escrita deste artigo" (Silva, 2020, p. 22).

## 5 TABELAS

### 5.1 TABELAS DIVERSAS

Tabela 5.1 – Relações de Arquimedes para o volume da esfera de raio  $R$

MÉTODO	RELAÇÃO
Equilíbrio	Considerando uma balança com ponto de apoio em $O$ , a esfera e um cone de raio e altura $2R$ colocados a uma distância $2R$ do ponto $O$ equilibram um cilindro de raio e altura $2R$ colocado a uma distância $R$ de $O$ .
Dupla redução ao absurdo	O volume da esfera é igual a 4 vezes o volume de um cone de raio e altura $R$ .
Cilindro circunscrito	O cilindro circunscrito à esfera é igual a uma vez e meia à esfera, em área e volume.

Fonte: Udesc (2019).

Tabela 5.2 – Aproximação da maior raiz de  $f(x) = e^x - 4x - 3$  pelo método de Newton-Raphson

$n$	$x_n$	$\phi(x_n) = x_{n+1}$	$ x_{n+1} - x_n  \leq \varepsilon$
0	3	2.6838441	$0.3161559 > 10^{-6}$
1	2.6838441	2.5987140	$0.0851301 > 10^{-6}$
2	2.5987140	2.5932538	$0.0054602 > 10^{-6}$
3	2.5932538	2.5932325	$0.0000213 > 10^{-6}$
4	2.5932325	2.5932325	$< 10^{-6}$

Fonte: O Autor.

Analisando a Tabela 5.2, constatamos que ...

Tabela 5.3 – Aproximação da maior raiz de  $f(x) = e^x - 4x - 3$  pelo método de Newton-Raphson

$n$	$x_n$	$\phi(x_n) = x_{n+1}$	$ x_{n+1} - x_n  \leq \varepsilon$
0	3	2.6838441	$0.3161559 > 10^{-6}$
1	2.6838441	2.5987140	$0.0851301 > 10^{-6}$
2	2.5987140	2.5932538	$0.0054602 > 10^{-6}$
3	2.5932538	2.5932325	$0.0000213 > 10^{-6}$
4	2.5932325	2.5932325	$< 10^{-6}$

Fonte: O Autor.



## **6 CONCLUSÃO**

## REFERÊNCIAS

POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging problems in geometry**. New York: Dover, 1988. 245 p. 18

SILVA, F. H. Polígonos elegantes. **Revista do Professor de Matemática**, n. 102, p. 22–25, 2020. 25, 26

TAVARES, M. C. F. P. **Superfícies e sólidos esféricos**. 128 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2019. 18, 22, 23, 24, 25, 26

## ÍNDICE

### Citações

diretas, 18

indiretas, 18

### Equações

align, 20

eqnarray, 20

### Figuras

com o pacote subfigure, 22

com o pacote wrapfigure, 23

sem o pacote subfigure, 22